D-MATH | Lineare Algebra II | FS 2024

Prof. Dr. S. Zerbes

Musterlösung Serie 26

Tensorprodukt

1. Zeige: Ist $1 \leqslant n := \min\{\dim_k(V_1), \dim_K(V_2)\} < \infty$ für Vektorräume V_1 und V_2, so ist jeder Tensor in $V_1 \otimes_K V_2$ eine Summe von n reinen Tensoren, aber im allgemeinen nicht von $n-1$ reinen Tensoren.

   Lösung: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $n = \dim_K(V_2) \leqslant \dim_K(V_1)$ annehmen. Sei $\{b_i\}_{i\in I}$ eine Basis von V_1 und sei $\{b'_1, \ldots, b'_n\}$ eine Basis von V_2. Dann ist
$$\{\, b_i \otimes b'_j \mid i \in I,\, 1 \leqslant j \leqslant n\}$$
   eine Basis von $V_1 \otimes V_2$. Jeder Vektor $v \in V_1 \otimes V_2$ lässt sich daher schreiben als
$$v = {\sum_{i\in I}}' \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_i \otimes b'_j$$
   für eindeutige Koeffizienten $a_{ij} \in K$. Mit $v_j := \sum'_{i\in I} a_{ij} b_i \in V_1$ für alle j folgt
$$v = \sum_{j=1}^{n} v_j \otimes b'_j.$$
   Also ist v die Summe der n reinen Tensoren $v_1 \otimes b'_1, \ldots, v_n \otimes b'_n$.

   Wir müssen weiter zeigen, dass ein Tensor existiert, welcher nicht die Summe von $n-1$ reinen Tensoren ist. Wegen $\dim(V_1) \geqslant \dim(V_2)$ können wir dabei $\{1, \ldots, n\} \subset I$ annehmen.

   Behauptung. Der Tensor $v := \sum_{i=1}^{n} b_i \otimes b'_i$ lässt sich nicht als Summe von $n-1$ reinen Tensoren schreiben.

   Beweis. Angenommen, es sei $v = \sum_{i=1}^{n-1} v_i \otimes w_i$ für Vektoren $v_i \in V_1$ und $w_i \in V_2$. Aus Dimensionsgründen existiert dann eine nicht-verschwindende Linearform $\ell\colon V_2 \to K$ mit $\ell(w_i) = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$. Durch Anwenden der linearen Abbildung $\mathrm{id}_{V_1} \otimes \ell\colon V_1 \otimes_K V_2 \to V_1 \otimes_K K$ erhalten wir
$$\sum_{i=1}^{n} \ell(b'_i) \cdot (b_i \otimes 1) \;=\; \sum_{i=1}^{n} b_i \otimes \ell(b'_i) \;=\; (\mathrm{id}_{V_1} \otimes \ell)(v) \;=\; \sum_{i=1}^{n-1} v_i \otimes \ell(w_i) \;=\; 0.$$
   Da die Vektoren $b_i \otimes 1$ f"ur alle $i \in I$ eine Basis von $V_1 \otimes_K K$ bilden, folgt daraus $\ell(b'_i) = 0$ für alle i. Da andererseits die b'_i eine Basis von V_2 bilden, folgt daraus $\ell = 0$, im Widerspruch zur Annahme. $\square$

2. Sei V ein Vektorraum der Dimension n und sei t ein Element von $V \otimes_K V$. Seien $B = (b_1, \dots, b_n)$ und $B' = (b'_1, \dots, b'_n)$ geordnete Basen von V und schreibe

$$t \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \cdot b_i \otimes b_j \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} \alpha'_{ij} \cdot b'_i \otimes b'_j$$

mit eindeutigen Koeffizienten $\alpha_{ij}, \alpha'_{ij} \in K$. Beschreibe die Beziehung zwischen den Matrizen

$$A := (\alpha_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \quad \text{und} \quad A' := (\alpha'_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

in Termen der Basiswechselmatrix $[\mathrm{id}]^B_{B'}$.

Lösung: Die Matrix $M := [\mathrm{id}]^B_{B'} = (m_{ij})_{i,j}$ ist charakterisiert durch die Formel $b_i = \sum_{k=1}^n m_{ki} b'_k$ für alle i. Es folgt

$$\begin{aligned} t \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\, b_i \otimes b_j \;&=\; \sum_{i,j} \alpha_{ij} \Big(\sum_k m_{ki} b'_k \Big) \otimes \Big(\sum_\ell m_{\ell j} b'_\ell \Big) \\ &=\; \sum_{i,j,k,\ell} \alpha_{ij} m_{ki} m_{\ell j}\, b'_k \otimes b'_\ell \\ &=\; \sum_{k,\ell} \Big(\sum_{i,j} \alpha_{ij} m_{ki} m_{\ell j} \Big) b'_k \otimes b'_\ell \,. \end{aligned}$$

Da $\{b'_i \otimes b'_j \mid i,j = 1, \dots, n\}$ eine Basis von $V \otimes V$ bildet, folgt für alle k, ℓ

$$\alpha'_{k\ell} = \sum_{i,j} m_{ki} \alpha_{ij} m_{\ell j}.$$

In Matrizen bedeutet dies $A' = M \cdot A \cdot M^T$.

3. Verwenden Sie die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts, um zu zeigen, dass

$$V \otimes W \cong W \otimes V$$

für endlichdimensionale Vektorräume V, W über einem Körper K.

Lösung: Sei $\{v_1, \ldots, v_m\}$ eine Basis von V und sei $\{w_1, \ldots, w_n\}$ eine Basis von W. Wir definieren die Abbildung

$$T : V \times W \to W \otimes V, \ \left(\sum a_i v_i, \sum b_j w_j\right) \mapsto \sum_{i,j} a_i b_j (w_j \otimes v_i).$$

Die Bilinearität von T folgt unmittelbar aus der Definition.

Wir möchten zeigen, dass das Paar $(W \otimes V, T)$ dieselbe universelle Eigenschaft erfüllt wie $(V \otimes W, \otimes)$. Sei also Z ein K-Vektorraum und $\Phi : V \times W \to Z$ eine bilineare Abbildung. Wir müssen beweisen, dass es eine eindeutige lineare Abbildung $\eta : W \otimes V \to Z$ gibt, sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "\Phi"'] & W \otimes V \arrow[d, "\eta"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Wir definieren η so, dass

$$\eta\left(\sum_{i,j} c_{ij}(w_j \otimes v_i)\right) = \sum_{i,j} c_{ij} \Phi(v_i, w_j).$$

Die Definition zeigt eindeutig, dass η linear ist. Darüber hinaus ist sie eindeutig, weil eine Zuordnung auf Basiselementen eine lineare Abbildung eindeutig bestimmt.

Daher erfüllt $W \otimes V$ dieselbe universelle Eigenschaft wie $V \otimes W$. Lemma 19.4.8 zeigt dann, dass sie kanonisch isomorph sind.

4. Seien U, V, W endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper K. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Hom}(U \otimes V, W) \cong \mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V, W)).$$

Unwichtige Bemerkung. Wir sagen, dass der "Hom-Funktor" und das Tensorprodukt ein adjungiertes Paar bilden.

Lösung: Definieren wir die Abbildung

$$\begin{array}{rrcc} \Phi : & \mathrm{Hom}(U \otimes V, W) & \to & \mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V, W)) \\ & [\tau : U \otimes V \to W] & \mapsto & \left[\begin{array}{rccc} \Phi(\tau) : & U & \to & \mathrm{Hom}(V, W) \\ & u & \mapsto & \tau_u : v \mapsto \tau(u \otimes v) \end{array}\right] \end{array}$$

Wir überprüfen, dass diese Abbildung linear ist: seien $\tau, \sigma \in \mathrm{Hom}(U \otimes V, W)$ und $a, b \in K$. Dann

$$\begin{aligned}(a\tau + b\sigma)_u(v) &= (a\tau + b\sigma)(u \otimes v)\\ &= a\tau(u \otimes v) + b\sigma(u \otimes v)\\ &= a\tau_u(v) + b\sigma_u(v)\end{aligned}$$

Da dies für alle $u \in U$ und $v \in V$ gilt, haben wir $\Phi(a\tau + b\sigma) = a\Phi(\tau) + b\Phi(\sigma)$. Dies beweist, dass Φ linear ist. Wir müssen noch beweisen, dass Φ eine lineare Inverse zulässt. Betrachten wir die Abbildung

$$\begin{array}{cccc}\Psi : & \mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V, W)) & \to & \mathrm{Hom}(U \otimes V, W)\\ & \left[\begin{array}{cccc}\sigma : & U & \to & \mathrm{Hom}(V, W)\\ & u & \mapsto & \sigma_u\end{array}\right] & \mapsto & \left[\begin{array}{cccc}\Psi(\sigma) : & U \otimes V & \mapsto & W\\ & u \otimes v & \mapsto & \sigma_u(v)\end{array}\right]\end{array}$$

Dies ist eine beidseitige Inverse von Φ. Tatsächlich haben wir

$$\begin{aligned}((\Psi \circ \Phi)(\tau))(u \otimes v) &= (\Phi(\tau)(u))(v) = \tau(u \otimes v)\\ [((\Phi \circ \Psi)(\sigma))(u)](v) &= \Psi(\sigma)(u \otimes v) = \sigma_u(v)\end{aligned}$$

Da v beliebig war, gilt $(\Phi \circ \Psi)(\sigma)(u) = \sigma_u$ als Elemente von $\mathrm{Hom}(V, W)$, und da dies für alle u gilt, ist $(\Psi \circ \Phi)(\sigma) = \sigma$ als Elemente von $\mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V, W))$.

5. Sei $\big(V, \langle\ ,\ \rangle\big)$ ein unitärer Vektorraum. Bezeichne V aufgefasst als *reellen* Vektorraum mit $V_{\mathbb{R}}$. Zeige:

   (a) Der Realteil $\operatorname{Re}\langle\ ,\ \rangle$ ist ein (euklidisches) Skalarprodukt auf $V_{\mathbb{R}}$.

   (b) Für jede Orthonormalbasis B von $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ist
   $$\big\{v, iv \mid v \in B\big\}$$
   eine Orthonormalbasis von $(V_{\mathbb{R}}, \operatorname{Re}\langle\ ,\ \rangle)$.

   (c) Jeder unitäre Endomorphismus von V ist ein orthogonaler Endomorphismus von $V_{\mathbb{R}}$.

   Lösung:

   (a) Man prüft direkt, dass $\operatorname{Re}\langle\ ,\ \rangle$ bilinear ist; zum Beispiel gilt $\operatorname{Re}\langle \lambda v, w\rangle = \operatorname{Re}(\overline{\lambda}\langle v, w\rangle) = \lambda \operatorname{Re}\langle v, w\rangle$ für alle $v, w \in V_{\mathbb{R}}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wegen $\operatorname{Re}\overline{z} = \operatorname{Re} z$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist
   $$\operatorname{Re}\langle v, w\rangle = \operatorname{Re}(\,\overline{\langle w, v\rangle}\,) = \operatorname{Re}\langle w, v\rangle$$
   für alle $v, w \in V_{\mathbb{R}}$, also $\operatorname{Re}\langle\ ,\ \rangle$ symmetrisch, und wegen $\langle v, v\rangle > 0$ für alle $v \in V_{\mathbb{R}} \smallsetminus \{0\}$ ist $\operatorname{Re}\langle\ ,\ \rangle$ zudem positiv definit, also ein euklidisches Skalarprodukt.

   (b) Jeder Vektor in V ist eine komplexe Linearkombination der Basisvektoren B, also auch eine reelle Linearkombination der Vektoren $\{v, iv \,|\, v \in B\}$; Die Vektoren v, iv für alle $v \in B$ erzeugen also V.
   Aus $\langle b, b'\rangle = \delta_{bb'}$ für alle $b, b' \in B$ folgt
   $$\begin{aligned}\operatorname{Re}\langle b, b'\rangle &= \delta_{bb'},\\ \operatorname{Re}\langle b, ib'\rangle &= \operatorname{Re}\big(i \cdot \delta_{bb'}\big) = 0,\\ \operatorname{Re}\langle ib, ib'\rangle &= \operatorname{Re}\big(i \cdot (-i) \cdot \delta_{bb'}\big) = \delta_{bb'}.\end{aligned}$$
   Also ist $\{b, ib \mid b \in B\}$ eine Orthonormalbasis von $(V_{\mathbb{R}}, \operatorname{Re}\langle\ ,\ \rangle)$.

   (c) Für einen unitären Endomorphismus f von V gilt $\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle$, also $\operatorname{Re}\langle f(v), f(w)\rangle = \operatorname{Re}\langle v, w\rangle$ für alle $v, w \in V$, also f orthogonal bezüglich $\operatorname{Re}\langle\ ,\ \rangle$.

6. Sei $f\colon V \to V'$ eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen, und sei L ein Oberkörper von K. Zeige:

   (a) Die Abbildung $f \otimes \mathrm{id}_L\colon V_L \to V'_L$ ist L-linear.

   (b) $\mathrm{Kern}(f \otimes \mathrm{id}_L) = \mathrm{Kern}(f) \otimes_K L$.

   (c) $\mathrm{Bild}(f \otimes \mathrm{id}_L) = \mathrm{Bild}(f) \otimes_K L$.

   (d) $\mathrm{Rang}_L(f \otimes \mathrm{id}_L) = \mathrm{Rang}_K(f)$.

   Lösung:

   (a) Nach Konstruktion ist die Abbildung $f \otimes \mathrm{id}_L$ K-linear, also insbesondere additiv. Ausserdem gilt f"ur alle $v \in V$ und $x, y \in L$

$$\begin{aligned}(f \otimes \mathrm{id}_L)(x \cdot (v \otimes y)) &= (f \otimes \mathrm{id}_L)(v \otimes xy) = f(v) \otimes xy \\ &= x \cdot (f(v) \otimes y) = x \cdot (f \otimes \mathrm{id}_L)(v \otimes y).\end{aligned}$$

   Da jedes Element $\tilde{v} \in V \otimes_K L$ eine Summe von Elementen der Form $v \otimes y$ ist, folgt

$$(f \otimes \mathrm{id}_L)(x \cdot \tilde{v}) = x \cdot (f \otimes \mathrm{id}_L)(\tilde{v})$$

   f"ur alle $x \in L$. Insgesamt ist $f \otimes \mathrm{id}_L$ also L-linear.

   (b-c) Wähle eine Basis B von $\mathrm{Kern}(f)$, ein Komplement $U \subset V$ von $\mathrm{Kern}(f)$, sowie eine Basis B' von U. Dann induziert f eine bijektive Abbildung von B' auf eine Basis $B'' = f(B')$ von $\mathrm{Bild}(f)$. Nach der Vorlesung sind dann

$$\begin{aligned}\tilde{B} &:= \{b \otimes 1 \mid b \in B\} && \text{eine Basis von } \mathrm{Kern}(f) \otimes_K L,\\ \tilde{B}' &:= \{b' \otimes 1 \mid b' \in B'\} && \text{eine Basis von } U \otimes_K L,\\ \tilde{B} \cup \tilde{B}' &= \{b \otimes 1 \mid b \in B \cup B'\} && \text{eine Basis von } V \otimes_K L,\\ \tilde{B}'' &:= \{b'' \otimes 1 \mid b'' \in B''\} && \text{eine Basis von } \mathrm{Bild}(f) \otimes_K L.\end{aligned}$$

   Insbesondere ist somit

$$V \otimes_K L = (\mathrm{Kern}(f) \otimes_K L) \oplus (U \otimes_K L).$$

   F"ur jedes $b \in B$ gilt $(f \otimes \mathrm{id}_L)(b \otimes 1) = f(b) \otimes 1 = 0 \otimes 1 = 0$; also ist $B \subset \mathrm{Kern}(f \otimes \mathrm{id}_L)$ und somit $\mathrm{Kern}(f) \otimes_K L \subset \mathrm{Kern}(f \otimes \mathrm{id}_L)$. Andererseits bildet $f \otimes \mathrm{id}_L$ die Menge $\tilde{B}'$ bijektiv auf $\tilde{B}''$ ab und induziert daher einen Isomorphismus $U \otimes_K L \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bild}(f) \otimes_K L$. Zusammen impliziert dies also $\mathrm{Bild}(f \otimes \mathrm{id}_L) = \mathrm{Bild}(f) \otimes_K L$ und $\mathrm{Kern}(f \otimes \mathrm{id}_L) = \mathrm{Kern}(f) \otimes_K L$, wie gewünscht.

   (d) Aus der Definition des Rangs, der Aussage (c), und der Dimensionsinvarianz der Basiserweiterung folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{Rang}_L(f \otimes \mathrm{id}_L) &= \dim_L(\mathrm{Bild}(f \otimes \mathrm{id}_L)) \\ &= \dim_L(\mathrm{Bild}(f) \otimes_K L) \\ &= \dim_K(\mathrm{Bild}(f)) = \mathrm{Rang}_K(f).\end{aligned}$$

7. Seien U und V Vektorräume über einem Körper K, und sei $f \in \mathrm{Hom}(U)$, $g \in \mathrm{Hom}(V)$. Definiere

$$f \otimes g : U \otimes V \to U \otimes V$$

durch

$$f \otimes g(v \otimes w) = f(v) \otimes g(w).$$

Beweisen Sie, dass

$$\mathrm{Tr}(f \otimes g) = \mathrm{Tr}(f)\,\mathrm{Tr}(g).$$

Lösung: Sei $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_m\}$ bzw. $\mathcal{C} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von U bzw. V. Dann ist eine Basis für das Tensorprodukt $U \otimes V$ gegeben durch

$$\mathcal{D} = \{u_i \otimes v_k \mid 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant k \leqslant n\}.$$

Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,m} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ und $B = (b_{k\ell})_{k,\ell=1,\ldots,n} = [g]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$. Dann gilt per Definition

$$\begin{aligned}(f \otimes g)(u_i \otimes v_k) &= f(u_i) \otimes g(v_k) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ji} u_j\right) \otimes \left(\sum_{\ell=1}^{n} b_{\ell k} v_\ell\right) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{n} a_{ji} b_{\ell k} (u_j \otimes v_\ell).\end{aligned}$$

Somit sind die Diagonaleinträge von $[f \otimes g]_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}}$ gegeben durch

$$\{a_{ii} b_{kk} \mid 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant k \leqslant n\}.$$

Da die Spur nicht von der Wahl der Basis abhängt, erhalten wir

$$\mathrm{tr}(f \otimes g) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ii} b_{kk} = \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ii}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_{kk}\right) = \mathrm{tr}(f)\,\mathrm{tr}(g).$$