

Lineare Algebra - Übungen 3

1. Es seien $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Entscheiden Sie fuer jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist, und geben Sie einen Beweis oder Gegenbeispiel.

- (a) $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$;
- (b) if $AB = 0$, dann gilt $A = 0$ oder $B = 0$.
- (c) wenn $AB = 0$, dann koennen A und B nicht beide invertierbar sein.
- (d) wenn A und B invertierbar sind, dann gilt das Gleiche fuer $A - B$.

Hinweis: Gegenbeispiele lassen sich oft schon fuer $n = 2$ finden.

2. Bestimmen Sie fuer welche Werte von $A \in \mathbb{R}$ und $B \in \mathbb{R}$ das folgende Gleichungssystem in den Variablen $x, y, z \in \mathbb{R}$ lösbar ist.

$$\begin{aligned} 1x + 2y - 3z &= 14 \\ 3x + 7y - 9z &= 47 \\ -3x - 5y + Az &= B \\ 2x + 4y - 3z &= 29. \end{aligned}$$

Geben Sie fuer Ihre gefundenen Werte von A und B alle Lösungen an.

3. (a) Es sei A eine $(m \times n)$ -Matrix mit $m \geq 3$. Finden sie fuer die folgenden EZUs eine passende $(m \times m)$ -Matrix E , um die EZU auf A auch als Matrixmultiplikation $E \cdot A$ schreiben zu können:

- 1. $P(2, 3)$
- 2. $M(1, 5)$
- 3. $S(1, 2, 3)$

(b) Wenden Sie elementare Zeilenumformungen auf die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

an, sodass die resultierende Matrix R auf der linken Seite die 3×3 -Einheitsmatrix enthält. Geben Sie explizit eine invertierbare Matrix W an, sodass gilt

$$W \cdot A = R.$$

Berechnen Sie auch W^{-1} .

Hinweis: Um W und W^{-1} zu finden, ist der erste Teil der Aufgabe sehr hilfreich.

4. Bestimmen Sie alle Matrizen $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit der Eigenschaft, dass die Summe aller Elemente jeder Zeile, jeder Spalte und beider Diagonalen einen vorgegebenen Wert $c \in \mathbb{R}$ annimmt.

Welchen Wert nimmt insbesondere die Zahl a_{22} an?

Ergänzen Sie nun mit dem erlangten Wissen die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 16 & a_{13} \\ 24 & 30 & 36 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

so, dass sie den obigen Bedingungen genügt.

Hinweis: Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf und verwenden Sie EZU um die Lösungen zu finden.