Lineare Algebra - Übungen 4

1. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^4$ sind reelle Unterräume?

$$\begin{aligned} V_1 &:= \{\, (0, x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R} \,\} \\ V_2 &:= \{\, (x^4, x^3, x^2, x) \mid x \in \mathbb{R} \,\} \\ V_3 &:= \{\, (x, x+y, x-y, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \,\} \\ V_4 &:= \{\, (x^4 - y^4, 0, 0, 0) \mid x, y \in \mathbb{R} \,\} \\ V_5 &:= \{\, (x, y, 0, 0) \mid x, y \in \mathbb{R},\ x > y \,\}. \end{aligned}$$

2. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $V = \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$. Welche der folgenden Mengen sind Unterräume von V?

   (a)
$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid ad - bc \neq 0 \right\}$$

   (b)
$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid d = 0 \right\}$$

   (c)
$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid a = d \right\}$$

   (d)
$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix} \in V \right\}$$

   Geben Sie für jeden Unterraum ein Erzeugendensystem an, d.h. finden Sie vektoren $w_1, w_2, \ldots, w_n$, sodass die lineare Hülle

$$\langle w_1, w_2, \ldots, w_n \rangle$$

   der entsprechende Unterraum ist.

3. Sei X eine Menge, V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$, und $\mathcal{F}(X, V)$ der $\mathbb{K}$-Vektorraum aller Abbildungen von X nach V, mit punktweiser Addition

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad \forall x \in X \forall f, g \in \mathcal{F}(X, V)$$

   und punktweiser skalarer Multiplikation

$$(\lambda \cdot f)(x) := \lambda f(x) \quad \forall x \in X \forall f \in \mathcal{F}(X, V) \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

   Seien $y \in X$ und $v \in V$ fixiert, sowie $\mathcal{F}_{y,v} := \{f \in \mathcal{F}(X, V) \mid f(y) = v\}$.

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}_{y,v}$ genau dann ein Unterraum ist, wenn $v = 0$.

   (b) Finden Sie einen Unterraum $W \subset \mathcal{F}(X, V)$, so dass

$$\mathcal{F}(X, V) = \mathcal{F}_{y,0} + W,$$

sowie $W \cap \mathcal{F}_{y,0} = \{0_\mathcal{F}\}$ gilt, wobei $0_\mathcal{F}$ der Nullvektor ist.

4. Gegeben seien die Unterräume

$$V := \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad U := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

von $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie den Durchschnitt $V \cap U$ und finden Sie ein Erzeugendensystem.

5. Sei V die lineare Hülle der Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

in $\mathrm{M}_{1\times 3}(\mathbb{R})$. Finden Sie ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösungsmenge genau V ist.

6. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

   (a) Sei $v \in V$, dann ist die Menge $W := \{w \in V \mid \exists \lambda \in \mathbb{K} : w = \lambda \cdot v\}$ ein Unterraum von V.

   (b) Eine Teilmenge $W \subset V$ ist genau dann ein Unterraum, wenn $\langle W \rangle = W$.

   (c) Seien $S_1, S_2 \subset V$ Teilmengen. Dann gilt $\langle S_1 \cup S_2 \rangle = \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle$.

   (d) Seien $S_1, S_2 \subset V$ Teilmengen. Dann gilt $\langle S_1 \cap S_2 \rangle = \langle S_1 \rangle \cap \langle S_2 \rangle$.

   Hinweis: Die lineare Hülle der leeren Menge $\langle \emptyset \rangle$ ist per Definition der triviale Unterraum $\{0_V\}$.