Lineare Algebra - Übungen 7

1. Berechnen Sie eine Basis des Kerns und des Bildes der linearen Abbildung von $\mathbb{R}^4$ nach $\mathbb{R}^3$ definiert durch Linksmultiplikation mit
$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Seien U, V, W beliebige Vektorräume. Beweisen Sie folgende Ungleichungen:
   (a) Für beliebige lineare Abbildungen $f, g\colon U \to V$ gilt
   $$\mathrm{rk}(f+g) \;\leq\; \mathrm{rk}(f) + \mathrm{rk}(g).$$
   (b) Für beliebige lineare Abbildungen $f\colon U \to V$ und $g\colon V \to W$ gilt
   $$\mathrm{rk}(g \circ f) \;\leq\; \min\{\,\mathrm{rk}(f), \mathrm{rk}(g)\}.$$
   (c) Formulieren und beweisen Sie analoge Eigenschaften für Matrizen.

3. Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$ und
$$T \in \mathrm{Hom}(V, W) := \{f : V \to W \mid f \text{ ist eine } \mathbb{K}\text{-lineare Abbilung}\}.$$
   (a) Beweisen Sie
      (i) Für jeden Untervektorraum $W' \subset W$ ist das Urbild
      $$T^{-1}(W') := \{v \in V \mid T(v) \in W'\}$$
      ein Unterraum von V.
      (ii) Das Bild von T
      $$\mathrm{im}(T) := \{T(v) \in W \mid v \in V\}$$
      ist ein Unterraum von W.
      (iii) Es gilt
      $$\dim(T^{-1}(W')) = \dim T^{-1}(0) + \dim(\mathrm{im}(T) \cap W').$$
   (b) Beweisen Sie
      (i) T ist genau dann injektiv, wenn T eine lineare Linksinverse besitzt, d.h. es gibt $S \in \mathrm{Hom}(W, V)$ so dass $S \circ T = \mathrm{id}_V$.
      (ii) T ist genau dann surjektiv, wenn T eine lineare Rechtsinverse besitzt, d.h. es gibt $S \in \mathrm{Hom}(W, V)$ so dass $T \circ S = \mathrm{id}_W$.
   (c) Finden Sie Beispiele für Abbildungen T und S wie in $(b.i)$ und $(b.ii)$, die jedoch nicht invertierbar sind.

4. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $(x, y) \mapsto (x - 2y, -2x + 4y, 3x - 6y)$. Finden Sie Basen von

$\mathbb{R}^2$ und von $\mathbb{R}^3$, bezüglich welcher die Matrix $A = (a_{ij})$ von f die Form

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j = 1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

annimmt.

5. Betrachten Sie den Endomorphismus $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch Linksmultiplikation mit der Matrix A, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

   (a) Zeigen Sie, dass $T_A^2 := T_A \circ T_A \neq 0$, aber $T_A^3 := T_A^2 \circ T_A = 0$.

   (b) Finden Sie eine Basis $\{u, v, w\}$ von $\mathbb{R}^3$ mit $T_A(u) = 0$, $T_A(v) = u$, $T_A(w) = v$ und bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von $[T_A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ bezüglich $\mathcal{B} := (u, v, w)$.

6. Seien lineare Abbildungen $\mathbb{R}^4 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 - x_4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 3x_1 \end{pmatrix}.$$

   Sei weiterhin

$$a := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

   sei b die standard Basis des $\mathbb{R}^2$ und sei

$$c := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

   (a) Zeigen Sie, dass a eine Basis des $\mathbb{R}^4$ und c eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

   (b) Bestimmen Sie $g \circ f$ und die Matrixdarstellungen von

      () f bezüglich der Basen a, b.

      () g bezüglich der Basen b, c.

      () $g \circ f$ bezüglich der Basen a, c.

7. Sei V ein nichttrivialer, endlich-dimensionaler Vektorraum. Beweisen oder widerlegen Sie:

   (a) V ist eine direkte Summe von 1-dimensionalen Unterräumen, d.h. V kann geschrieben werden als

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n,$$

   wobei U_i ein 1-dimensionaler Unterraum für alle $1 \leq i \leq n$ ist.

(b) Für jeden Endomorphismus $f\colon V \to V$ gilt $V = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$.

(c) Sei $V' \subset V$ ein Unterraum. Jeder Automorphismus $f\colon V' \to V'$ kann zu einem Automorphismus $\overline{f}\colon V \to V$ fortgesetzt werden.

(d) Für Unterräume V_1, V_2, V_3 von V gilt $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ genau dann, wenn $V = V_1 + V_2 + V_3$ und $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \{0\}$ ist.