Lineare Algebra - Übungen 8

1. Seien $\mathcal{B}_1 := (\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix})$ und $\mathcal{B}_2 := (\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\5\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix})$.
   Sei $\mathcal{E} := (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.
   (a) Machen Sie sich anhand einer Zeichnung klar, dass die drei Vektoren von $\mathcal{B}_1$ bzw. $\mathcal{B}_2$ bezüglich $\mathcal{E}$ jeweils nicht in einer Ebene liegen ($\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ sind *Basen*).
   (b) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix T_1 (bzw. T_2) des Basiswechsels von $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_2$ (bzw. von $\mathcal{B}_2$ nach $\mathcal{B}_1$).
   (c) Überprüfen Sie durch Nachrechnen, dass $T_1\,T_2 = T_2\,T_1 = I$ gilt.

2. Sei $T : V \to W$ eine invertierbare lineare Abbildung und $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ geordnete (endliche) Basen für V und W. Geben Sie einen Beweis oder finden Sie ein Gegenbeispiel für die folgende Aussage:

$$\left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)^{-1} = [T^{-1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$$

3. Sei $r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbilfung, welche die Spiegelung bezüglich der Ebene $E : x_1 + x_2 + x_3 = 0$ beschreibt. Finden Sie die zu r gehörende Matrix
   (a) bezüglich der Basis (v_1, v_2, n), wobei (v_1, v_2) eine Basis von E ist, und $n = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.
   (b) bezüglich der Standardbasis.

4. Sei V ein Vektorraum. Ein Endomorphismus $P : V \to V$ heisst *idempotent* oder eine *Projektion*, falls $P^2 = P$ ist. Zeige:
   (a) Für jede Projektion P gilt

$$V = \mathrm{Kern}(P) \oplus \mathrm{Bild}(P).$$

   (b) Seien $W_1, W_2 \subset V$ zwei beliebige Untervektorräume mit $V = W_1 \oplus W_2$. Dann gibt es eine eindeutige Projektion $P : V \to V$, sodass gilt:

$$\mathrm{Kern}(P) = W_1 \quad \text{und} \quad \mathrm{Bild}(P) = W_2\,.$$

5. Betrachten Sie die Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = y\}$$

   (a) Zeigen Sie, dass E ein Unterraum ist.
   (b) Zeigen Sie, dass das *orthogonale Komplement*

$$E^{\perp} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \forall (x', y', z') \in E : xx' + yy' + zz' = 0\}$$

   ein nicht-trivialer Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist und zeigen Sie $E \oplus E^{\perp} = \mathbb{R}^3$.
   (c) Sei $P_E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die *orthogonale Projektion* auf E, d.h. P ist eine Projektion mit $\mathrm{Ker}(P_E) = E^{\perp}$ und $\mathrm{Im}(P_E) = E$. (Wegen Aufgabe 3 wissen Sie schon, dass diese Projektion existiert.)

Finden Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$, so dass

$$[P_E]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Bestimmen Sie $[P_E]_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_3}$, wobei $\mathcal{E}_3$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ ist.

6. Sei $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ und $V_n = \langle 1, \ldots, t^n \rangle \subset \mathbb{R}[t]$ der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad $\leq n$. Es sei $B_n = (1, \ldots, t^n)$ eine Basis und

$$\mathrm{D}_n \colon V_n \to V_{n-1}, \qquad \sum_{k=0}^{m} a_k t^k \mapsto \sum_{k=1}^{m} k a_k t^{k-1}$$

der Ableitungshomomorphismus.

(a) Bestimmen Sie die Matrix $[\mathrm{D}_n]_{\mathcal{B}_{n-1}}^{\mathcal{B}_n}$.

(b) Wir betrachten das geordnete Tupel $C_n = (1, 1+t, 1+t+t^2, \ldots, 1+\ldots+t^n)$ in V_n.
Zeigen Sie, dass C_n eine Basis von V_n ist und berechnen Sie die Basiswechselmatrizen $[\mathrm{id}_{V_n}]_{C_n}^{B_n}$ und $[\mathrm{id}_{V_n}]_{B_n}^{C_n}$.

(c) Bestimmen Sie die Matrix $[\mathrm{D}_n]_{\mathcal{C}_{n-1}}^{\mathcal{C}_n}$.

7. (a) Sei $T \colon V \to V$ ein Isomorphismus eines Vektorraums V der Dimension n. Zeigen Sie, dass es Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ gibt, sodass

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \mathbf{1}_n.$$

Wann ist es auch möglich eine einzelne Basis $\mathcal{B}'$ zu finden, sodass $[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = \mathbf{1}_n$ gilt?

(b) Es sei nun $T_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung der Linksmultiplikation mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasis. Finden Sie solche Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.