Lineare Algebra - Übungen 9

1. Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gegeben durch die folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{pmatrix}, \; a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

   Bestimmen Sie jeweils Basen von $\ker(T)$ und $\operatorname{im}(T)$.

2. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:
   (a) Für zwei beliebige $\mathbb{K}$-Vektorräume V und W ist $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ ein Untervektorraum des Raumes W^V aller Abbildungen $V \to W$.
   (b) Für zwei beliebige lineare Abbildungen $f\colon V' \to V$ und $g\colon W \to W'$ ist die Abbildung

$$C_{g,f} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V', W'), \quad h \mapsto g \circ h \circ f$$

   wohldefiniert und linear. Sind zudem f und g Isomorphismen, so auch $C_{g,f}$.

3. Sei $P_n(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller Polynome von Grad $\leq n$ mit reellen Koeffizienten.
   (a) Zeigen Sie, dass

$$F\colon P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R}) \; p \mapsto p'' + p'$$

   eine lineare Abbildung ist, wobei p' die Ableitung von p bezeichnet.
   (b) Bestimmen Sie die Matrix von F bezüglich der Basis $(1, x, \ldots, x^n)$ von $P_n(\mathbb{R})$.

4. Seien V ein Vektorraum, $F : V \to V$ eine lineare Abbildung und $v \in V$, so dass es eine natürliche Zahl n gibt für die gilt:

$$F^n(v) \neq 0 \qquad \text{und} \qquad F^{n+1}(v) = 0.$$

   Beweisen Sie, dass dann $v, F(v), \ldots, F^n(v)$ linear unabhängig sind.

5. Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen der folgenden linearen Gleichungssysteme in $\mathbb{R}^3$ beziehungsweise $\mathbb{R}^4$:
   (a)

$$\begin{aligned} 4x &\; - 9y &\; + 2z &\; = 5 \\ 2x &\; + 2y &\; + z &\; = 9 \\ -3x &\; &\; + 8z &\; = 18 \\ x &\; - 2y &\; + 3z &\; = 9 \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} -2a &\; - b &\; + 7c &\; = 0 \\ 3a &\; + 10b &\; - 2c &\; = 3 \\ -2a &\; - 2b &\; + 6c &\; = 7 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \diamondsuit \quad &+ 6\heartsuit &+ 7\clubsuit &+ 12\spadesuit &= 1 \\ 2\diamondsuit \quad &+ 5\heartsuit &+ 8\clubsuit &+ 11\spadesuit &= 1 \\ 3\diamondsuit \quad &+ 4\heartsuit &+ 9\clubsuit &+ 10\spadesuit &= 1 \end{aligned}$$

6. Beweisen Sie:

   (a) Eine Matrix $C \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ hat genau dann Rang $\leq r$, wenn es Matrizen $A \in \mathrm{M}_{m\times r}(\mathbb{K})$ und $B \in \mathrm{M}_{r\times n}(\mathbb{K})$ gibt, so dass $C = AB$.

   (b) Ist $\mathrm{rk}(C) = r$, so muss zusätzlich $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B) = r$ gelten.