Serie 16

Eigenvektoren/-werte

Durchgehend auf diesem Übungsblatt wird angenommen, dass $\mathbb{K}$ ein Körper ist.

1. Betrachte die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ aus Serie 15 Übung 2.

   (a) Bestimme die Eigenräume den Eigenwerten von A.

   (b) Bestimme die algebraische und geometrische Vielfachheit jedes Eigenwerts von A.

2. Berechne das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenvektoren der folgenden Matrizen über $\mathbb{Q}$ und überprüfe, ob die Matrizen diagonalisierbar sind. Wenn sie es sind, finde die Basiswechselmatrix, die sie in eine Diagonalmatrix umwandelt.

   (a) $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

   (b) $B := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

   (c) $C := \begin{pmatrix} -4 & -3 & -1 & -7 \\ -3 & -1 & -1 & -4 \\ 6 & 4 & 3 & 8 \\ 3 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

3. Seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f \in \mathrm{Hom}(V)$. Nehme an, dass $f^2 = \mathrm{id}$ ist und, dass -1 kein Eigenwert von f ist. Zeige, dass $f = \mathrm{id}$.

4. Sei V ein endlichdimensional $\mathbb{K}$-Vektorraum, $T \in \mathrm{Hom}(V)$, und $v \in V$ mit $v \neq 0$. Sei $p \in \mathbb{K}[x]$ ein nichttriviales Polynom minimalen Grades, sodass $p(T)v = 0$. Zeige, dass jede Nullstelle von p ein Eigenwert von T ist.

5. Betrachten Sie den Raum $C^\infty(\mathbb{R})$ der glatten Funktionen über $\mathbb{R}$ und die Abbildung

$$T: \begin{array}{ccc} C^\infty(\mathbb{R}) & \to & C^\infty(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$$

   Finden Sie die Eigenwerte und die entsprechenden Eigenfunktionen (dies ist ein Synonym für Eigenvektoren, wenn man in einem Raum arbeitet, dessen Elemente Funktionen sind) von T.

6. **Wichitge Übung:**

   (a) Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums V, und sei $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ mit f-invarianten Unterräumen V_i. Zeige, dass die algebraische bzw. geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts $\lambda \in \mathbb{K}$ von f gleich der Summe der algebraischen bzw. geometrischen Vielfachheiten von λ als Eigenwert der Endomorphismen $f|_{V_i}$ von V_i ist.

   (b) Folgere, dass f diagonalisierbar ist genau dann, wenn $f|_{V_i}$ diagonalisierbar ist für jedes i.

   (c) Seien f und g Endomorphismen desselben endlich-dimensionalen Vektorraums V. Zeige, dass f und g *simultan diagonalisierbar* sind (das heisst, dass eine Basis aus simultanen Eigenvektoren für f und g existiert) genau dann, wenn sie miteinander kommutieren und separat diagonalisierbar sind.

   Tipp: Um die Rückwärtsimplikation zu beweisen, zeigen Sie zuerst, dass jeder Eigenraum von f g-invariant ist, d.h. dass g Eigenvektoren von f auf Eigenvektoren von f *im selben Eigenraum* abbildet.

7. Zeigen Sie, dass $\mathbb{K}^\infty$ keine abzählbare Basis hat.

   Hinweis: Verwenden Sie die Tatsache, dass paarweise verschiedene Eigenwerte einer Menge linear unabhängiger Eigenvektoren entsprechen.

Single Choice. Pro Aufgabe ist genau eine Antwort korrekt.

1. Betrachte die lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$T(x, y) = (41x + 7y, -20x + 74y).$$

   Welche der folgende ist wahr?

   - ◯ T is diagonalisierbar bezüglich der Basis $\{(1, 4), (7, 5)\}$.
   - ◯ T is diagonalisierbar bezüglich der Basis $\{(4, 1), (5, 7)\}$.
   - ◯ T ist nicht diagonalisierbar.