

Serie 18

DIAGONALISIERUNG, JORDANSCHER NORMALFORM

In diesem Übungsblatt werden die Begriffe ‘‘Hauptraum’’ und ‘‘verallgemeinerter Eigenraum’’ synonym verwendet.

1. Betrachte die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 14 & -13 & 8 \\ -13 & 14 & 8 \\ 8 & 8 & -7 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

Finde eine Matrix $P \in O_3(\mathbb{R})$, sodass $P^{-1}AP$ diagonal ist.

2. Bestimme die Jordansche Normalform der folgenden Matrix über \mathbb{R} und über \mathbb{F}_3 :

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Bestimme die verallgemeinerte Eigenräume über \mathbb{C} der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 & 2 \\ -7 & 3 & -3 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Sei K ein Körper. Betrachte den Raum $K[x]_n$ der Polynome über K vom Grad kleinergleich n . Bestimme eine Jordannormalform der Endomorphismen

(a)

$$D_1 : K[x]_n \rightarrow K[x]_n \\ p(x) \mapsto p'(x)$$

(b)

$$D_2 : K[x]_n \rightarrow K[x]_n \\ p(x) \mapsto p''(x)$$

5. Zeige den fehlenden Teil (lineare unabhängigkeit) der Behauptung im Beweis von Satz 14.4.1. des Skripts.
6. Die Motivation hinter der Jordan-Normalform liegt oft in dem Bestreben, die Matrix so zu gestalten, dass sie möglichst viele Nullen enthält. Jedoch stellt sich die Frage, ob die Anzahl der Nullen tatsächlich durch die Jordan-Normalform maximiert wird. Anders ausgedrückt: Existiert eine quadratische Matrix A über einem Körper, die mehr Nullen aufweist als ihre Jordan-Normalform J ?
7. Finde ein Vektorraum W und $T \in \text{Hom}(W)$, so dass

$$\ker(T^k) \subsetneq \ker(T^{k+1}) \quad \text{und} \quad \text{Bild}(T^k) \supsetneq \text{Bild}(T^{k+1})$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gelten.