Serie 21

Skalarprodukt, Orthogonalität

1. (a) Angenommen $\theta \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$$

orthonormale Basen von $\mathbb{R}^2$ sind.

   (b) Zeigen Sie, dass jede orthonormale Basis von $\mathbb{R}^2$ eine der Formen in (a) hat.

2. Betrachten Sie

$$\left\{ A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right\} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

und versehen Sie $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ mit dem in Serie 20 Übung 6 definierten Skalarprodukt. Finden Sie eine orthonormale Basis von $\mathrm{LH}(A_1, A_2)$.

3. Seien V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und $S \subset V$ ein Orthonormalsystem. Zeige, dass sich S zu einer Orthonormalbasis von V ergänzen lässt.

4. Ein Unterraum U von $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt sei aufgespannt von den beiden Vektoren $v_1 = (1,1,1)^T$ und $v_2 = (0,2,1)^T$.

   (a) Bestimme je eine Orthonormalbasis von U und von $U^\perp$.

   (b) Berechne die Darstellungsmatrizen der orthogonalen Projektionen $\mathbb{R}^3 \to U$ und $\mathbb{R}^3 \to U^\perp$ bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und der jeweiligen Basis aus (a).

5. Zeige die folgende Behauptung:

Satz. *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit innerem Produkt. Nehme an, dass $T \in \mathrm{Hom}(V)$. Wenn T eine obere Dreiecksmatrix bezüglich einer Basis von V hat, dann hat T eine obere Dreiecksmatrix bezüglich einer orthonormalen Basis von V.*

6. Für jeden der folgenden Vektorräume V mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ soll die Menge $U^\perp$ für die gegebene Teilmenge U gefunden werden.

   (a) Betrachte zuerst

$$V_1 = \left\{ (a_0, a_1, a_2, \dots) \mid \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}, \quad \langle (a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n,$$

$$U_1 = \{ (a_n)_{n=0}^{\infty} \in V \mid \exists N \geqslant 0 \text{ sodass } \forall m \geqslant N : a_m = 0 \}$$

   (b) Zweitens betrachte

$$V_2 = C([0,1]), \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx,$$

$$U_2 = \left\{ f \in V \mid \int_0^{1/2} f(x) dx = 0 \right\}.$$

Single Choice. Pro Aufgabe ist genau eine Antwort korrekt.

1. Betrachte den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit dem Standard-Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und der dazugehörigen Norm $\| \ \|$. Für welche Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ gilt $\|v + w\| = \|v\| + \|w\|$?

   ◯ $v = \binom{1}{1},\ w = \binom{1}{0}$

   ◯ $v = \binom{2}{1},\ w = \binom{1}{2}$

   ◯ $v = \binom{2}{3},\ w = \binom{3}{1}$

   ◯ $v = \binom{1}{2},\ w = \binom{2}{4}$

2. Sei V ein euklidischer Vektorraum und seien $v_1, v_2, v_3 \in V$. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

   ◯ Aus $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$ folgt $v_1 \perp v_3$.

   ◯ Aus $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$ folgt $v_1 \perp (v_2 + v_3)$.

   ◯ Aus $v_1 \perp v_2$ folgt $v_1 \perp -v_2$.

   ◯ Aus $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$ folgt $v_1 \perp v_3$.

3. Sei V ein euklidischer Vektorraum und seien S, $T \subset V$ zwei Teilmengen. Welche der folgenden Eigenschaften ist im allgemeinen nicht äquivalent zu den anderen?

   ◯ $S \subset T^\perp$

   ◯ $T \subset S^\perp$

   ◯ $S \perp T$

   ◯ $\langle S \rangle \cap \langle T \rangle = \{0\}$

4. Sei S eine Teilmenge eines endlichdimensionalen euklidischen Vektorraums V. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

   ◯ $(S^\perp)^\perp = \langle S \rangle$.

   ◯ S ist das orthogonale Komplement eines Unterraumes von V.

   ◯ $S^\perp$ ist ein Unterraum von V.

   ◯ $V = S^\perp \oplus (S^\perp)^\perp$.

Multiple Choice Fragen.

1. Welche der folgenden Matrizen sind hermitesch?
   - ◯ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
   - ◯ $\frac{1}{i}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   - ◯ $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} i & -2 \\ 2 & i \end{pmatrix}$
   - ◯ $\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$

2. Welche der folgenden Matrizen sind unitär?
   - ◯ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
   - ◯ $\frac{1}{i}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   - ◯ $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} i & -2 \\ 2 & i \end{pmatrix}$
   - ◯ $\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$

3. Seien U, V unitäre $n \times n$ Matrizen, $\lambda = e^{2\pi i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Welche Aussagen sind allgemein korrekt?
   - ◯ $U + V$ ist unitär.
   - ◯ λU ist unitär.
   - ◯ U^{-1} ist unitär.
   - ◯ UV ist unitär.