Serie 23

Adjungierte Abbildung, Selbstadjungierten und normalen Operatoren

Definition. Ein linear Operator $T : V \to V$ heißt selbstadjungiert, wenn $T = T^*$. Anders ausgedrückt ist $T \in \mathrm{Hom}(V)$ selbstadjungiert genau dann, wenn

$$\langle Tv, w\rangle = \langle v, Tw\rangle$$

für alle $v, w \in V$ gilt.

1. Es seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ und $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ IP Räume über einem Körper $\mathbb{K}$, und es sei $T : V \to W$ linear. Zeige, dass

$$\mathrm{Bild}(T^*) = \ker(T)^\perp \text{ and } \mathrm{Bild}(T) = \ker(T^*)^\perp.$$

2. Seien V und W wie oben. Nehme an, dass $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Zeige, dass
   (a) T genau dann injektiv ist, wenn T^* surjektiv ist.
   (b) T genau dann surjektiv ist, wenn T^* injektiv ist.

3. Sei K ein Körper und sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler K-Skalarproduktraum. Betrachte $T \in \mathrm{End}(V)$ und einen Unterraum U von V. Zeige, dass U invariant unter T ist genau dann wenn $U^\perp$ invariant unter T^* ist.

4. (a) Geben Sie ein Beispiel für einen Operator $T \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^2)$ an, der nicht normal ist. Erklären Sie sorgfältig, warum es sich nicht um einen normalen Operator handelt.
   (b) Geben Sie ein Beispiel für einen diagonalisierbaren Operator $T \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^2)$ an, der nicht normal ist.
   (c) Geben Sie ein Beispiel für einen Operator $T \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^3)$ an, der normal, aber nicht selbstadjungiert ist.
   (d) Geben Sie ein Beispiel für einen Operator $T \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2)$ an, der diagonalisierbar, aber nicht selbstadjungiert ist.
   (e) Überprüfen Sie, ob der Operator

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ v &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v \end{aligned}$$

   normal ist. Erklären Sie, warum er nicht selbstadjungiert ist.

5. Sei $\mathbb{R}^2$ mit dem Skalarprodukt ausgestattet

$$\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2,\ \ x, y \in \mathbb{R}^2.$$

   (a) Definieren Sie einen selbstadjungierten Operator T auf dem Skalarproduktraum $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit Eigenwerten $\sqrt{2}, 1$.

   (b) Ist der lineare Operator

$$\begin{aligned} T:\ \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ v &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v \end{aligned}$$

   ein selbstadjungierter Operator auf dem Skalarproduktraum $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$?

6. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit IP. Fixiere $u, x \in V$. Definiere $T \in \mathrm{Hom}(V)$ durch

$$Tv = \langle v, u\rangle x$$

   für jedes $v \in V$.

   (a) Angenommen, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass T genau dann selbstadjungiert ist, wenn $\{u, x\}$ linear abhängig ist.

   (b) Zeigen Sie, dass T genau dann normal ist, wenn $\{u, x\}$ linear abhängig ist.

7. Wir machen $\mathbb{R}[x]_2$ durch

$$\langle p, q\rangle := \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

   zu einem Skalarproduktraum. Definiere $T \in \mathrm{End}\left(\mathbb{R}[x]_2\right)$ durch $T\left(a_0 + a_1x + a_2x^2\right) = a_1x$.

   (a) Zeige, dass T nicht selbstadjunigert ist.

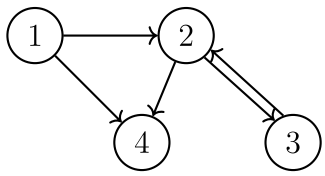
   (b) Die Darstellungsmatrix von T zur Basis $(1, x, x^2)$ ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Diese Matrix ist gleich ihrer konjugierten Transponierten, obwohl T nicht selbstadjungiert ist. Erkläre, warum dies kein Widerspruch ist.

8. Sei $G = (V, E)$ ein endlicher gerichteter Graph. Genauer, seien V eine endliche Menge und $E \subseteq \{(v_{\text{init}}, v_{\text{term}}) \mid v_{\text{init}}, v_{\text{term}} \in V \wedge v_{\text{init}} \neq v_{\text{term}}\} \subseteq V \times V$. Wir fassen V als Menge der Knoten eines Graphen auf, und $(v_{\text{init}}, v_{\text{term}}) \in E$ als gerichtete Kante $v_{\text{init}} \in V$ zu $v_{\text{term}} \in V$ (wir visualisieren dies, indem wir einen Pfeil zu v_{term} an die Kante zeichnen).

   Beispiel eines gerichteten Graphen.

   Wir definieren ausserdem Vektorräume $\mathbb{R}^V = \{f : V \to \mathbb{R}\}$ und $\mathbb{R}^E = \{\varphi : E \to \mathbb{R}\}$, welche wir mit den inneren Produkten

$$\langle f_1, f_2 \rangle_V = \sum_{v \in V} f_1(v) f_2(v), \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}^V$$
$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_E = \sum_{e \in E} \varphi_1(e) \varphi_2(e), \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}^E$$

   ausstatten. Ausserdem definieren wir $T : \mathbb{R}^V \to \mathbb{R}^E$ als “kombinatorische Ableitung”: für $f \in \mathbb{R}^V$ und $e = (v_{\text{init}}, v_{\text{term}}) \in E$, definieren wir

$$T(f)(e) = f(v_{\text{term}}) - f(v_{\text{init}}).$$

   Des Weiteren definieren wir $S : \mathbb{R}^E \to \mathbb{R}^V$ durch

$$S(\varphi)(v) = \sum_{\substack{v_{\text{init}} \in V \\ (v_{\text{init}}, v) \in E}} \varphi((v_{\text{init}}, v)) - \sum_{\substack{v_{\text{term}} \in V \\ (v, v_{\text{term}}) \in E}} \varphi((v, v_{\text{term}})).$$

   (a) Zeige $T^* = S$ und berechne $T^* \circ T = S \circ T$, was wir auch den kombinatorischen Laplace von G nennen.

   (b) Jetzt vereinfachen wir die Situation indem wir nur noch ungerichtete Kanten betrachten, d.h..

$$(v_{\text{init}}, v_{\text{term}}) \in E \Leftrightarrow (v_{\text{term}}, v_{\text{init}}) \in E,$$

   und annehmen, dass der Graph d-regular ist (für jedes $v \in V$ existieren genau d Knoten $v_{\text{term}} \in V$ mit $(v, v_{\text{term}}) \in E$). Zeige, dass $T^* \circ T$ den Eigenwert 0 hat. Erkläre, warum die geometrische Vielfachheit von 0 mit dem Zusammenhang von G zu tun hat.