Serie 25

Isometrien, Tensorprodukt

1. Gegeben sei die reelle Matrix
$$A := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$
   (a) Zeige, dass A orthogonal und $\det A = 1$ ist.
   (b) Bestimme die Drehachse und den Drehwinkel von $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $v \mapsto Av$.

2. Zeige: Für jeden orthogonalen Endomorphismus f eines n-dimensionalen euklidischen Vektorraumes V gilt
$$|\operatorname{Tr}(f)| \leqslant n.$$
   Für welche f gilt Gleichheit?

3. Betrachten Sie zwei zweidimensionale Teilräume $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^3$. Beschreiben Sie die Menge der Elemente $T \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, so dass
$$TE_1 = E_2$$
   gilt, in Bezug auf orthogonale Basen von E_1 und E_2.

   Hinweis: Gehen Sie zunächst davon aus, dass $E_1 = E_2 = \mathrm{Sp}(e_1, e_2)$ ist.

4. Angenommen, $T \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3)$ und $5, 7$ sind Eigenwerte von T. Beweisen Sie, dass $T_{\mathbb{C}}$ keine nicht-reellen Eigenwerte hat.

5. Sei $S_1 = \{1, x, 2x, x^2, \ldots, x^k\}$ und $S_2 = \{1, x, x^2, \ldots, x^k\}$. Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass $K(S_1)$ nicht isomorph zu $K(S_2)$ ist.

6. Vereinfache den folgenden Ausdruck in $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^3$.
$$-\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7. Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper K. Zeige
$$V^* \otimes W \cong \mathrm{Hom}(V, W).$$