D-MATH | Lineare Algebra II | FS 2024
Prof. Dr. S. Zerbes

Serie 26

Tensorprodukt

1. Zeige: Ist $1 \leqslant n := \min\{\dim_k(V_1), \dim_K(V_2)\} < \infty$ für Vektorräume V_1 und V_2, so ist jeder Tensor in $V_1 \otimes_K V_2$ eine Summe von n reinen Tensoren, aber im allgemeinen nicht von $n-1$ reinen Tensoren.

2. Sei V ein Vektorraum der Dimension n und sei t ein Element von $V \otimes_K V$. Seien $B = (b_1, \ldots, b_n)$ und $B' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ geordnete Basen von V und schreibe
$$t \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \cdot b_i \otimes b_j \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} \alpha'_{ij} \cdot b'_i \otimes b'_j$$
mit eindeutigen Koeffizienten $\alpha_{ij}, \alpha'_{ij} \in K$. Beschreibe die Beziehung zwischen den Matrizen
$$A := (\alpha_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \quad \text{und} \quad A' := (\alpha'_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$
in Termen der Basiswechselmatrix $[\mathrm{id}]^B_{B'}$.

3. Verwenden Sie die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts, um zu zeigen, dass
$$V \otimes W \cong W \otimes V$$
für endlichdimensionale Vektorräume V, W über einem Körper K.

4. Seien U, V, W endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper K. Zeigen Sie, dass
$$\mathrm{Hom}(U \otimes V, W) \cong \mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V, W)).$$
Unwichtige Bemerkung. Wir sagen, dass der "Hom-Funktor" und das Tensorprodukt ein adjungiertes Paar bilden.

5. Sei $\big(V, \langle\ ,\ \rangle\big)$ ein unitärer Vektorraum. Bezeichne V aufgefasst als *reellen* Vektorraum mit $V_{\mathbb{R}}$. Zeige:

   (a) Der Realteil $\operatorname{Re}\langle\ ,\ \rangle$ ist ein (euklidisches) Skalarprodukt auf $V_{\mathbb{R}}$.

   (b) Für jede Orthonormalbasis B von $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ist
   $$\big\{v, iv \;\big|\; v \in B\big\}$$
   eine Orthonormalbasis von $(V_{\mathbb{R}}, \operatorname{Re}\langle\ ,\ \rangle)$.

   (c) Jeder unitäre Endomorphismus von V ist ein orthogonaler Endomorphismus von $V_{\mathbb{R}}$.

6. Sei $f\colon V \to V'$ eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen, und sei L ein Oberkörper von K. Zeige:

   (a) Die Abbildung $f \otimes \mathrm{id}_L\colon V_L \to V'_L$ ist L-linear.

   (b) $\mathrm{Kern}(f \otimes \mathrm{id}_L) = \mathrm{Kern}(f) \otimes_K L$.

   (c) $\mathrm{Bild}(f \otimes \mathrm{id}_L) = \mathrm{Bild}(f) \otimes_K L$.

   (d) $\mathrm{Rang}_L(f \otimes \mathrm{id}_L) = \mathrm{Rang}_K(f)$.

7. Seien U und V Vektorräume über einem Körper K, und sei $f \in \mathrm{Hom}(U)$, $g \in \mathrm{Hom}(V)$. Definiere
   $$f \otimes g : U \otimes V \to U \otimes V$$
   durch
   $$f \otimes g(v \otimes w) = f(v) \otimes g(w).$$
   Beweisen Sie, dass
   $$\mathrm{Tr}(f \otimes g) = \mathrm{Tr}(f)\,\mathrm{Tr}(g).$$