D–MATH

Prüfung Lineare Algebra I

401-1151-00L

Nachname	*Vorname*	*Legi-Nr.*
XX	**XX**	**XX-000-000**
		Prüfungs-Nr.
		000

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Es ist jeweils **genau eine** Antwort korrekt: Für genau die richtige Antwort gibt es **einen** Punkt.
Punktabzug bei falschen Antworten gibt es **nicht**.
Füllen Sie für jede Antwort das entsprechende Kästchen am **Multiple-Choice Antwortheft** aus.

Für die gesamte Aufgabe nehmen wir an, dass V ein Vektorraum über einem Körper K ist.

1.MC1 [1 Punkt] Die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ist linear unabhängig.

(A) Richtig

(B) Falsch

1.MC2 [1 Punkt] Betrachte die Teilmengen $S_1, S_2 \subseteq V$, so dass $S_1 \subset S_2$ aber $S_1 \neq S_2$ gilt. Falls S_1 ein Erzeugendensystem für V ist, ist dann auch S_2 ein Erzeugendensystem für V.

(A) Richtig

(B) Falsch

1.MC3 [1 Punkt] Es seien U, V, W Vektorräume über einem Körper K, und es sei $S \in \operatorname{Hom}(U, V)$ und $T \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Dann gilt

$$\dim(\ker(T \circ S)) = \dim(\ker(S)) + \dim(\ker(T)).$$

(A) Richtig

(B) Falsch

1.MC4 [1 Punkt] Es sei W ein Vektorraum über dem Körper K, und $T \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Falls T surjektiv ist, dann ist die duale Abbildung $T^* \colon W^* \to V^*$ auch surjektiv.

(A) Richtig

(B) Falsch

1.MC5 [1 Punkt] Es seien $S_1, S_2 \subseteq V$. Dann gilt

$$\langle S_1 \cap S_2 \rangle \subseteq \langle S_1 \rangle \cap \langle S_2 \rangle$$

(A) Richtig

(B) Falsch

1.MC6 [1 Punkt] Betrachte die folgenden Permutationen einer Menge mit 5 Elementen.

$$\begin{array}{ll} \sigma_1 = (15)(14)(15) & \sigma_2 = (234)(15) \\ \sigma_3 = (312) & \sigma_4 = (12345)(34) \end{array}$$

Welche dieser Permutationen hat das Vorzeichen $+1$?

(A) σ_1

(B) σ_2

(C) σ_3

(D) σ_4

1.MC7 [1 Punkt] Für welches $x \in \mathbb{R}$ gilt $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} = 1$?

(A) $x = -2$

(B) $x = 2$

(C) $x = -1$

(D) $x = 1$

1.MC8 [1 Punkt] Es sei W ein Vektorraum über einem Körper K. Der Graph $\Gamma(f)$ einer Abbildung $f : V \to W$, ist definiert als die Menge

$$\Gamma(f) = \{(v, f(v)) \mid v \in V\} \subseteq V \times W.$$

Für welche der folgenden Abbildungen ist deren Graph $\Gamma(\cdot)$ **kein** linearer Unterraum des Vektorraums $V \times W$?

(A) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z$.

(B) $g : \mathbb{R}[x]^{\leq 3} \to \mathbb{R}$, $g(p(x)) = Dp(0)$, wobei D die Ableitungsabbildung ist.

(C) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die Reflexion an der xy-Achse.

(D) Alle Graphen der obigen Abbildungen ergeben lineare Unterräume von $V \times W$.

Aufgabe 2

Schreiben Sie Ihre Antworten direkt in die dafür vorhergesehenen Boxen im Antwortheft. Sie müssen Ihre Antworten nicht begründen. Nur die Antworten, die sich in den bereitgestellten Boxen befinden, werden bewertet.

2.A1 [2 Punkte] Es sei $\mathcal{B}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Es seien $f, g \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$, sodass

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad [g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

gilt.
Berechnen Sie die Abbildungsmatrix der Kompositionsabbildung $f \circ g$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

2.A2 [2 Punkte] Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $U \leq V$ ein Unterraum. Definieren Sie die Elemente des Quotientenraumes sowie Addition und Skalar-Multiplikation. Zeigen Sie, dass die beiden Operationen wohl-definiert sind.

2.A3 [3 Punkte] Finden Sie alle Werte von $t \in \mathbb{R}$ für welche die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4t & 0 & 0 & 2 \\ 5 & t & 1 & 0 \\ 0 & 2 & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 & t \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

nicht Rang 4 hat.

2.A4 [2 Punkte] Schreiben Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$,

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}.$$

als Linksmultiplikation mit einer Matrix A und finden Sie je eine Basis ihres Kerns und ihres Bildes.

2.A5 [3 Punkte] Es sei t ein reeller Parameter, für den wir die Unterräume

$$P_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + tz = 0\},$$
$$P_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + 2tz = 0\},$$
$$P_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + ty + z = 0\}$$

definieren.
Beschreiben Sie die Schnittmenge dieser drei Unterräume in Abhängigkeit des Parameters t.

Aufgabe 3

3.A1 [2 Punkte] Es sei U der Unterraum von $\mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Finden Sie eine Basis von $U^\perp$.

3.A2 [4 Punkte] Es sei $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^5$. Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + x_3 + 2x_5 \\ x_2 + 4x_3 \\ -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 + 8x_5 \\ x_1 - x_2 + x_5 \\ 6x_3 + 2x_4 - x_5 \end{pmatrix}$$

wobei die Vektoren bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ aufgefasst werden.
Es sei nun $\mathcal{C} = (e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_4, e_3 - e_5, 2e_3)$ eine weitere Basis. Berechnen Sie die Abbildungsmatrix $[T^*]^{\mathcal{C}^*}_{\mathcal{B}^*}$ der dualen Abbildung T^* bezüglich der zu $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ dualen Basen.

Aufgabe 4

Im Folgenden sei V ein Vektorraum über einem Körper K.

4.A1 [4 Punkte] Sei $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ linear unabhängig und sei $w \in V$ beliebig.
Zeigen oder widerlegen Sie, dass $\{v_1 + w, \dots, v_n + w\}$ genau dann linear abhängig ist, wenn $w \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$.

- Im Falle, dass die Aussage richtig ist, argumentieren Sie ob $\{v_1 + w, \dots, v_n + w\}$ auch dann noch linear abhängig ist, wenn $w \notin \langle v_1, \dots, v_n \rangle$.
- Im Falle, dass die Aussage falsch ist, geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an w an, sodass $\{v_1 + w, \dots, v_n + w\}$ linear abhängig ist.

4.A2 [2 Punkte] Sei $\{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ linear unabhängig.
Zeigen Sie, dass $\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_1 + v_3\}$ genau dann linear unabhängig ist, wenn $2 \neq 0$ in K gilt.

Aufgabe 5

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K.

5.A1 [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Abbildung $\tau_V : V \to V^{**}$, $v \mapsto (\ell \mapsto \ell(v))$ linear ist.

5.A2 [4 Punkte] Zeigen Sie, dass τ_V einen Isomorphismus zwischen V und seinem Bidualraum V^{**} beschreibt.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis annehmen, dass $\dim(V) = \dim(V^{**})$ *gilt.*

Aufgabe 6

6.A1 [2 Punkte] Finden Sie die Lösungsmenge $L(S) \subseteq \mathbb{R}^3$ des folgenden linearen Gleichungssystems (S):

$$\begin{aligned} 3a + 3b - c &= 5 \\ 2a + c &= 0 \\ 8a + 6b - c &= 10 \\ a - 3b + 3c &= -5 \end{aligned}$$

6.A2 [4 Punkte] Es sei $A \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$ jene Matrix ist, für die das lineare Gleichungssystem (S) als $Ax = b$, für einen Vektor $b \in \mathbb{R}^4$ geschrieben werden kann. Wir definieren $r = \operatorname{rk}(A)$, $s = 4 - r$ und $t = 5 - r$. Finden Sie invertierbare Matrizen P und Q, sodass

$$PAQ = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0_{r\times s} \\ 0_{t\times r} & 0_{t\times s} \end{pmatrix}.$$

6.A3 [2 Punkte] Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -9 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$$

und entscheiden Sie ob A und B äquivalent sind, oder nicht.

Aufgabe 7

Es sei K ein Körper.

7.A1 [2 Punkte] Beschreiben Sie alle Eigenschaften, die eine Funktion $D\colon M_{n\times n}(K) \to K$ besitzen muss, um eine Determinantenfunktion zu sein.

7.A2 [4 Punkte] Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$