Aufgabe 1. Zeigen Sie per Induktion folgende Identitäten für ganze Zahlen $n \geq 1$:

a) $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,

b) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$.

Aufgabe 2. Zeichnen Sie V Punkte auf ein Blatt Papier. Verbinden Sie die Punkte durch genug Linien (welche sich nicht schneiden und verschiedene Anfangs- und Endpunkte haben), so dass Sie ein zusammenhängendes Bild erhalten. Das heisst, es gibt einen Weg von jedem Punkt zu jedem anderen Punkt entlang der eingezeichneten Linien. Sei E die Anzahl Linien und F die Anzahl Flächen, in welche die Linien Ihr Blatt Papier teilt. Berechnen Sie,

$$V - E + F$$

für verschiedene Beispiele und stellen Sie eine Vermutung auf. Beweisen Sie die Vermutung durch Induktion.

Aufgabe 3. Finden Sie je ein Beispiel für eine Relation auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, die von den Eigenschaften einer Relation

a) nur die Symmetrie,

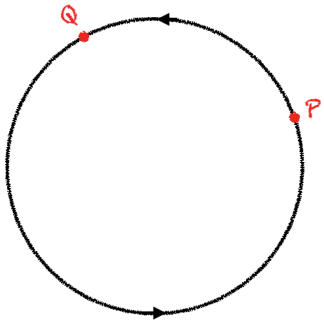
b) die Transitivität (und die Antisymmetrie),

c) die Reflexivität und die Transitivität, aber nicht die Symmetrie

erfüllt.

Aufgabe 4. Sei $(X, \leq)$ eine geordnete Menge. Falls es $m \in X$ gibt, so dass $x \leq m$ für alle $x \in X$ gilt, dann heisst $m \in X$ das **Maximum** von X. Überzeugen Sie sich davon, dass X höchstens ein Maximum haben kann.

Aufgabe 5. Wir betrachten die Menge aller Punkte auf einer Kreislinie in der Ebene $\mathbb{R}^2$. Für zwei Punkte P und Q sagen wir, dass $P \leq Q$ gelte, wenn $P = Q$ gilt, oder wenn der Kreisbogen von P nach Q im Gegenuhrzeigersinn (strikt) kürzer ist als der Kreisbogen von Q nach P im Gegenuhrzeigersinn.



Ist die so definierte Relation eine Ordnungsrelation auf den Punkten der Kreislinie? Kann es auf dieser Menge überhaupt eine Ordnungsrelation geben?