Aufgabe 1. Alle Elefanten sind rosarot. Beweis durch Induktion über die Anzahl der Elefanten: Für 0 Elefanten ist die Behauptung korrekt. Nehmen wir induktiv an, dass in jeder Menge die aus n Elefanten besteht, alle Elefanten rosarot sind. Sei X eine Menge mit $n+1$ Elefanten und nehmen wir einen Elefanten E heraus. Die restlichen n Elefanten sind alle rosarot nach der Induktionsannahme. Wir können E so wählen dass er rosarot ist: Falls er nicht rosarot wäre, ersetzen wir ihn mit einem dieser n rosaroten Elefanten. Also sind alle $n+1$ Elefanten rosarot. Wo liegt der Fehler?

Aufgabe 2. Sei $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Betrachte die Äquivalenzrelation $\sim_n$ auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, welche für $a, b \in \mathbb{Z}$ gegeben ist durch

$$a \sim_n b \text{ genau dann wenn } a - b \text{ ein Vielfaches von } n \text{ ist.}$$

Sei C_n die Menge der Äquivalenzklassen, also die Quotientenmenge. [1]

a) Wie viele Elemente besitzt C_n?

b) Für jede Zahl $a \in \mathbb{Z}$ sei $[a]_n \in C_n$ die dazugehörige Äquivalenzklasse. Zeige, dass $(C_n, +)$ eine Gruppe bildet, wobei die Addition zweier Klassen $[a]_n, [b]_n \in C_n$ definiert ist als
$$[a]_n + [b]_n := [a+b]_n.$$

c) Sei $C_n^\times = C_n \setminus \{[0]_n\}$. Ist die Multiplikation $\cdot$ geerbt von der Multiplikation auf $\mathbb{Z}$
$$[a]_n \cdot [b]_n := [a \cdot b]_n$$
wohldefiniert?

d*) Definiert $(C_n^\times, \cdot)$ eine Gruppe? Die Existenz der multiplikativen Inversen ist nicht ganz einfach. Googlen Sie nach dem *erweiterten euklidischen Algorithmus.*

e) Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$. Betrachten Sie die Vorschrift $g^k_{n,m} : C_n \to C_m$ gegeben durch $[a]_n \mapsto [k \cdot a]_m$. Wann definiert diese Vorschrift eine wohldefinierte Abbildung $g^k_{n,m}$?

Aufgabe 3. Versuchen Sie Ihren Schreibstil zu üben. Um zum Beispiel die Regel $-0 = 0$ zu beweisen, wird etwa folgendes Argument erwartet:
Das additive Inverse -0 *von* 0 *muss nach Definition der Inversen die Eigenschaft* $(-0) + 0 = 0 + (-0) = 0$ *erfüllen. Da aber die Definition des neutralen Elementes besagt, dass* $0 + 0 = 0 + 0 = 0$ *gilt und weil die Inverse in einer Gruppe eindeutig ist, muss* $-0 = 0$ *gelten.*
Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie die folgenden weiteren Rechenregeln:

[1] Siehe die Erklärungen auf dem Forum: `https://forum.math.ethz.ch/t/exercise-sheet-1/3011`.

1. $-(x+y) = (-x) + (-y)$ (wobei wir für letzteres auch $= -x - y$ schreiben),
2. $-(x-y) = -x + y$,
3. Zeigen Sie, dass das Distributivgesetz für die Subtraktion $x(y-z) = xy - xz$. gilt.

Aufgabe 4. Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper. Zeigen Sie, dass

$$x \leq y \iff x^3 + x \leq y^3 + y$$

für alle $x, y \in K$ gilt.

Aufgabe 5. Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper und seien $x, y, z \in K$ mit $xyz > 0$. Zeigen Sie, dass die folgende Ungleichung gilt

$$\frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Aufgabe 6. (*Umgekehrte Dreiecksungleichung*) Sei $(K, \leq)$ ein angeordneter Körper. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in K$ die Ungleichung

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$$

gilt. In welchen Fällen gilt Gleichheit?

Aufgabe 7.

1. Sei K ein Körper mit endlich vielen Elementen, kurz gesagt ein endlicher Körper. Zeigen Sie, dass es keine Ordnungsrelation auf K gibt, die K zu einem angeordneten Körper machen würde.
2. Sei K ein Körper. Angenommen es gibt ein Element $u \in K$ mit der Eigenschaft $u^2 + 1 = 0$. Zeigen Sie, dass es keine Ordnungsrelation auf K gibt, die K zu einem angeordneten Körper machen würde.