Aufgabe 1. Üben Sie weiter das Integrieren mit dem Integral Trainer. Das Ziel ist, dass Sie Integrale insbesondere mittels partieller Integration und Substitution sicher und schnell berechnen können.

Aufgabe 2. (Alte Prüfungsaufgabe) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = xy^2 + x, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Hinweis: Lesen Sie erst die Bemerkung 7.84 im Skript.

Aufgabe 3. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' - \left(\frac{4}{x} + 1\right) y = x^4, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Aufgabe 4. Lösen Sie die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen (ODEs):

a) $u''(x) + u(x) = \sin(2x), \qquad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1.$
Hinweis: Suchen Sie nach einer speziellen Lösung der Form $a\sin(2x) + b\cos(2x)$.

b) $u''(x) + 4u(x) = \cos(2x), \qquad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0.$
Hinweis: Suchen Sie nach einer speziellen Lösung der Form $ax\cos(2x) + bx\sin(2x)$.

c) $u''(x) + u'(x) - 2u(x) = x^2, \qquad u(0) = 2, \quad u'(0) = 1.$
Hinweis: Suchen Sie nach einer speziellen Lösung der Form $ax^2 + bx + c$.

d) $u''(x) + 2u'(x) - 3u(x) = \cos(x) + x, \qquad u(0) = 1, \quad u'(0) = 1.$
Hinweis: Suchen Sie nach einer speziellen Lösung der Form $a\sin(x) + b\cos(x) + cx + d$.

Aufgabe 5. (Alte Prüfungsaufgabe) Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung für zweimal stetig differenzierbare Funktionen $u : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$:

$$xu''(x) + 2u'(x) + \omega^2 xu(x) = 0,$$

wobei $\omega > 0$ eine fixe Konstante bezeichnet. Finden Sie alle beschränkten Lösungen dieser Differentialgleichung.

Tipp: Betrachten Sie die Funktion $v(x) = x\,u(x)$.