Aufgabe 1. (Alte Prüfungsaufgabe) Finden Sie alle Lösungen $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differenzialgleichung

$$y' = e^{x-y},$$

die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind.

Aufgabe 2. (Alte Prüfungsaufgabe) Finden Sie die Lösung $y\colon I \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$x^2y' = y^2, \quad y(1) = 2,$$

Aufgabe 3. (Alte Prüfungsaufgabe) Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ für $x > 0$.

Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $u = y/x$.

Differentialgleichungen mit Potenzreihen In den folgenden zwei Aufgaben wollen wir eine neue Technik kennen lernen, wie wir Lösungen zu gewissen Differentialgleichungen finden können. Die Idee ist die Funktion als Taylorreihe zu schreiben, Term für Term abzuleiten, dies dann in die Differentialgleichung einzusetzen und daraus Bedingungen für die Koeffizienten herzuleiten.

Konkreter, gehen wir wie folgt vor:

1. Wir nehmen an, die Lösung $y(x)$ einer Differentialgleichung kann als Taylorreihe geschrieben werden, also
$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

2. Wir differenzieren die Taylorreihe Term für Term und erhalten
$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$
und
$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

3. Wir setzen dies in die Differentialgleichung ein und vereinfachen (insbesondere müssen wir vielleicht die Indizes der Reihen neu definieren).
4. Wir vergleichen die Koeffizienten mit gleichen Potenzen von x um Werte für a_n zu bestimmen.
5. Wir setzen die Koeffizienten wieder in die Taylorreihe ein.

Aufgabe 4. Verwenden Sie das Lösungsverfahren mit der Taylorreihe um eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) + 2xy(x) = 0$$

zu finden. Kennen Sie eine Funktion deren Taylorreihe genau jene ist die Sie als Lösung erhalten haben? Überprüfen Sie dass ihre Lösung stimmt indem Sie diese Funktion in die Differentialgleichung einsetzen.

Hinweis: Falls Sie keine solche Funktion kennen, lösen Sie die Differentialgleichung mit Separation der Variablen und kontrollieren Sie dass die Lösungen übereinstimmen.

Aufgabe 5. (Bessel Gleichung mit $\alpha = 0$) Finden Sie eine Lösung für die Differentialgleichung

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0.$$

Bemerkung: Dies ist die DGL von Beispiel 7.73, Punkt 4 für $\alpha = 0$.