Aufgabe 1. Seien X und Y Mengen, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf Y. Sei $f : X \to Y$ eine Funktion, so dass

$$x_1 \sim x_2 \implies f(x_1) \equiv f(x_2)$$

für alle x_1, x_2 gilt. Zeigen Sie, dass es eine eindeutig bestimmte Abbildung $g : X/_\sim \to Y/_\equiv$ gibt, die

$$g([x]_\sim) = [f(x)]_\equiv$$

für alle $x \in X$ erfüllt.[1]

1. Angenommen $f : X \to Y$ sei surjektiv. Folgt daraus, dass auch g surjektiv ist?
2. Angenommen $f : X \to Y$ sei injektiv. Folgt daraus, dass auch g injektiv ist?
3. Angenommen $g : X/_\sim \to Y/_\equiv$ sei surjektiv. Folgt daraus, dass auch f surjektiv ist?
4. Angenommen $g : X/_\sim \to Y/_\equiv$ sei injektiv. Folgt daraus, dass auch f injektiv ist?

Aufgabe 2. Entscheiden Sie für sich, welche der folgenden Aussagen wahr sind, und welche falsch.
Seien X und Y Mengen, und sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Seien A, A_1, A_2 Teilmengen von X, und B, B_1, B_2 Teilmengen von Y.

(1)	$f(A_1) \cup f(A_2) = f(A_1 \cup A_2)$	(4)	$f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cup B_2)$
(2)	$f(A_1) \cap f(A_2) = f(A_1 \cap A_2)$	(5)	$f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cap B_2)$
(3)	$f^{-1}(f(A)) = A$	(6)	$f(f^{-1}(B)) = B$

Welche der falschen Aussagen sind wahr, wenn man zusätzlich annimmt, dass es sich bei f um eine injektive bzw eine surjektive Funktion handelt?

Aufgabe 3. In dieser Übung zeigen wir die Existenz und Einzigartigkeit einer bijektiven Funktion $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit der Eigenschaft $(\sqrt{a})^2 = a$ für alle $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

a) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$: $x < y$ äquivalent zu $x^2 < y^2$ ist.

b) *Eindeutigkeit:* Leiten Sie aus Schritt 1 ab, dass es für jedes $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ höchstens ein Element $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ geben kann, das $c^2 = a$ erfüllt.

[1] Falls Du dies noch nicht getan hast, solltest Du dir vielleicht noch den Eintrag `https://forum.math.ethz.ch/t/exercise-sheet-1/3011?u=retoka` im Forum durchlesen.

c) *Existenz:* Für eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ betrachte die nichtleeren Teilmengen

$$X = \{x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid x^2 \leq a\}, \qquad Y = \{y \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid y^2 \geq a\},$$

und wende das Vollständigkeitsaxiom an, um $c \in \mathbb{R}$ mit $x \leq c \leq y$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$ zu finden. Beweisen Sie, dass $c \in X$ und $c \in Y$, um zu folgern, dass sowohl $c^2 \leq a$ als auch $c^2 \geq a$ gelten, also $c^2 = a$.
Hinweis. Wenn durch Widerspruch $c \notin X$ ist (d.h. $c^2 > a$), dann kann man eine geeignet kleine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ finden, so dass $(c - \varepsilon)^2 \geq a$. Also $c - \varepsilon \in Y$, was $y \geq c$ für jedes $y \in Y$ widerspricht. Der Fall von $c \notin Y$ ist analog.

Wir nennen *Quadratwurzelfunktion* die Funktion $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die jedem $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Zahl $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ zuordnet, die durch die obige Konstruktion eindeutig bestimmt ist. Wir stellen fest, dass $c^2 = a$, und wir nennen $c = \sqrt{a}$ die *Quadratwurzel* von a. Zeigen Sie:

d) *Steigend:* Die Funktion $\sqrt{\cdot}$ ist steigend: Für $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $x < y$, gilt die Ungleichung $\sqrt{x} < \sqrt{y}$.

e) *Bijektivität:* Die Funktion $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist bijektiv.

f) *Multiplikativität:* Für alle $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$.

g) *Zwei Lösungen:* Zeigen Sie, dass es für $a > 0$ genau zwei reelle Lösungen der Gleichung $x^2 = a$ gibt. Wieviele gibt es für $a = 0$ und für $a < 0$?

Aufgabe 4. Welche der folgenden Teilmengen sind offen? Welche abgeschlossen? Begründen Sie.

(a) Der Punkt $A = \{0\}$ in $\mathbb{R}$,

(b) Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$,

(c) Das Intervall $C = [0, \infty)$ in $\mathbb{R}$,

(d) Das Intervall $D = (0, \infty)$ in $\mathbb{R}$,

(e) Die Menge $E = \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, n > 0 \right\}$ in $\mathbb{R}$,

(f) Die Menge $F = E \cup \{0\}$ in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 5. Schreiben Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen für $z \in \mathbb{C}$ in der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(a)	$z = (2 + 3i)(2 + i)$	(c)	$z = \frac{4+3i}{2-i}$	(e)	$z^3 = i$
(b)	$z = (2 - i)^3$	(d)	$z = \frac{2-i}{4+3i}$	(f)	$z^2 + 3 + 4i = 0$