Aufgabe 1. Sei $\mathbb{R}$ ein Körper reeller Zahlen, und sei $u \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es ein eindeutiges Element $c \in \mathbb{R}$ gibt, mit $c^3 + c = u$. Was können Sie demnach über die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sagen, die durch $f(x) = x^3 + x$ gegeben ist?

Hint 1: Verwenden Sie Aufgabe 4 von Übungsserie 1 für die Eindeutigkeit.

Hint 2: Argumentieren Sie wie in Aufgabe 3c) von Übungsserie 2 für die Existenz.

Aufgabe 2. Finden Sie alle komplexen Zahlen c mit der Eigenschaft $c^3 + c = 0$. Was können Sie demnach über die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sagen, die durch $f(z) = z^3 + z$ gegeben ist?

Vergleichen Sie mit Aufgabe 1.

Aufgabe 3. Zeichnen Sie folgende Teilmengen der komplexen Ebene.

(a) $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| \leq 3\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z^2) \geq 0\}$

(c) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \leq 3, \ |z| \leq 3, \ |z-i| \leq 3\}$

(d) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z+1) = \operatorname{Re}(z+iz), \ |z| \leq 2\}$

(e) $\{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 1, \ |\frac{z}{z-1}| \leq 1\}$

Aufgabe 4. Finden Sie das Infimum und Supremum der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$. Besitzen sie ein Minimum, ein Maximum?

1. $A = \{a - b \mid a, b \in \mathbb{R}, 1 < a < 2, 3 < b < 4\}$,
2. $B = \{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$,
3. $C = \{\frac{n}{m} \mid m, n \in \mathbb{N}, m + n \leq 10\}$.

Aufgabe 5. Seien $X \subseteq \mathbb{R}$ und $Y \subseteq \mathbb{R}$ nicht leere, nach oben beschränkte Teilmengen, mit der Eigenschaft $x \geq 0$ für alle $x \in X$ und $y \geq 0$ für alle $y \in Y$. Zeigen Sie, dass

$$XY := \{xy \mid x \in X, y \in Y\}$$

nach oben beschränkt ist, und dass $\sup(XY) = \sup(X)\sup(Y)$ gilt. Welche Konventionen für das Symbol ∞ brauchen Sie, falls X oder Y unbeschränkt ist?

Aufgabe 6. Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge mit folgender Eigenschaft: Für alle $x, y \in X$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt $x \leq c \leq y \implies c \in X$. Zeigen Sie, dass X ein Intervall ist.

Folgern Sie daraus, dass ein beliebiger nichtleerer Durchschnitt von Intervallen wiederum ein Intervall ist.

Aufgabe 7. Sei $X \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge, die offen und abgeschlossen ist. Zeigen sie, dass $X = \emptyset$ oder $X = \mathbb{R}$ gilt.

Hint: Nehmen Sie an, X sei nicht leer, wählen Sie $x \in X$, und studieren Sie die Menge der reellen Zahlen $r > 0$ mit der Eigenschaft $(x - r, x + r) \subseteq X$.