Aufgabe 1. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte in den reellen Zahlen, falls sie existieren:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n^4+15}{3n^4+n^3+n-1}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+5}{n^3+n+1}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^5-10}{n^2+1}$$

Verwenden Sie hier und auch sonst kein früher erlerntes Kochrezept, das Sie nicht begründen können.

Aufgabe 2. Formulieren und beweisen Sie einen allgemeinen Satz über Grenzwerte von Folgen wie in Aufgabe 1.

Aufgabe 3. Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, und sei $F \subseteq \mathbb{R}$ die Menge der Häufungspunkte der Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$. Zeigen Sie, dass F abgeschlossen ist.

Aufgabe 4. Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ die durch $x_0 = 1$ und

$$x_n = \frac{2}{3}\left(x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}\right)$$

für $n \geq 1$ rekursiv definierte Folge. Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 5. Seien $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergente Folgen reeller Zahlen, mit Grenzwerten A, B und C respektive. Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ die Folge definiert durch

$$x_n = \begin{cases} a_n & \text{falls } n = 3k, k \in \mathbb{N} \\ b_n & \text{falls } n = 3k+1, k \in \mathbb{N} \\ c_n & \text{falls } n = 3k+2, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Berechnen Sie $\limsup_{n\to\infty} x_n$, $\liminf_{n\to\infty} x_n$ und die Menge der Häufungspunkte der Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$.

Aufgabe 6. Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen, so dass $(x_{n+1} - x_n)_{n=0}^{\infty}$ gegen 0 konvergiert. Setze

$$A = \liminf_{n\to\infty} x_n \qquad \text{und} \qquad B = \limsup_{n\to\infty} x_n$$

Zeigen Sie, dass die Menge der Häufungspunkte der Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ das Intervall $[A, B]$ ist. Konstruieren Sie ein Beispiel solch einer Folge $[A, B] = [0, 1]$.

Aufgabe 7. Zeigen Sie, dass der Limes superior nicht mit Addition kommutiert: Seien $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ beschränkte Folgen. Zeigen Sie, dass zwar

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n,$$

gilt aber Gleichheit nicht immer gelten muss.

Aufgabe 8. Sei $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $(|z_n|)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert und geben Sie den Grenzwert an. Impliziert umgekehrt die Konvergenz von $(|z_n|)_{n=0}^{\infty}$ die Konvergenz von $(z_n)_{n=0}^{\infty}$?