Aufgabe 1.

a) (Lese-Aufgabe) Lesen Sie den Text am Ende dieser Übungsserie. Insbesondere sollten Sie wissen wie die Fakultät und die Binomialkoeffizienten definiert sind und den binomischen Lehrsatz kennen sowie den Beweis verstanden haben.

Für eine detailliertere Ausführung dieser Themen empfehlen wir die Abschnitte 3.3.1, 3.3.2 und 3.3.3 im Skript von Prof. Manfred Einsiedler.

b) Für jede reelle Zahl $a > 0$ definieren wir die Folge der reellen Zahlen $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ durch $x_n = \sqrt[n]{a}$. Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert, und dass

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

c) Wir definieren eine Folge von reellen Zahlen $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ durch $x_n = \sqrt[n]{n}$. Zeigen Sie, dass diese Folge konvergiert, mit Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die "reziproke" Funktion $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert durch $h(x) = \frac{1}{x}$ stetig ist.

Schliessen Sie daraus, dass Funktionen $q : D \to \mathbb{R}$ der Art

$$x \mapsto q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}$$

stetig sind, wenn $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetige Funktionen sind.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

nicht stetig ist.

Bemerkung: Wir werden die Funktion sin noch in der Vorlesung einführen. Für diese Aufgabe, Stetigkeit von $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und die üblichen Eigenschaften, die ihr vom Gymnasium kennt, dürfen vorausgesetzt werden.

Aufgabe 4. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in [0,1]$ existiert, so dass $f(x_0) = x_0$ gilt.

(b) Sei $g : [0,2] \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, so dass $g(0) = g(2)$ gilt. Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in [0,1]$ existiert, welches $g(x_0) = g(x_0 + 1)$ erfüllt.

Aufgabe 5. Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige, injektive Abbildung. Zeigen Sie, dass f streng monoton ist.

Aufgabe 6. Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine monotone Abbildung, so dass für alle $a, b \in I$ und $\xi \in \mathbb{R}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ein $x \in \mathbb{R}$ zwischen a und b existiert, welches $f(x) = \xi$ erfüllt. Zeigen Sie, dass f stetig ist.

Vergleichen Sie dieses Resultat mit dem Zwischenwertsatz.

Aufgabe 7. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn für jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ auch $f^{-1}(U)$ offen ist.

Aufgabe 8. Welche der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind gleichmässig stetig? Überzeugen Sie sich zuerst davon, dass die jeweils gegebene Funktion stetig ist, und skizzieren Sie den Graphen.

a) $f(x) = \sqrt{|x|}$,

b) $f(x) = x^2$,

c) $f(x) = \min(\sqrt{|x|}, x^2)$,

d) $f(x) = \inf_{k \in \mathbb{Z}} |x - k|$,

e) $f(x) = \inf_{k \in \mathbb{Z}} |x - k^2|$

f) $f(x) = x \cdot \inf_{k \in \mathbb{Z}} |x - k|$

Material zu Aufgabe 1a).

Fakultät Die Funktion $n \in \mathbb{N}_0 \mapsto n! \in \mathbb{N}$ ist definiert durch

$$0! = 1, \; n! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Die Zahl $n!$ wird als n-**Fakultät** oder n-**Faktorielle** bezeichnet.

Kombinatorische Bedeutung. Es gibt genau $n!$ verschiedene Möglichkeiten die Menge $\{1, \dots, n\}$ zu sortieren oder auch $n!$ Möglichkeiten für verschiedene Reihenfolgen, wenn n nummerierte Bälle zufällig aus einer Urne gezogen werden.

Binomialkoeffizienten Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$ definieren wir den **Binomialkoeffizienten** $\binom{n}{k}$, als "n über k" ausgesprochen, durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Ersetzen wir k bei gleichbleibendem n im Binomialkoeffizienten durch $n - k$, so vertauschen sich bloss die beiden Ausdrücke im Nenner und wir erhalten

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$.

Additionsformel. Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n$ gelten $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ und

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}. \tag{1}$$

Insbesondere ist $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$.

Proof. Wir verwenden die Definition der Binomialkoeffizienten und erhalten

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{0!\; n!} = 1$$

sowie

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-(k-1))!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{k\ n!}{k!\ (n+1-k)!} + \frac{(n+1-k)\ n!}{k!\ (n+1-k)!}$$
$$= \frac{(k+n+1-k)\ n!}{k!\ (n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

durch Erweiterung mit k beziehungsweise $n+1-k$.

Die Aussage, dass $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$, ergibt sich aus den ersten beiden Aussagen und Induktion nach n. $\square$

Kombinatorische Bedeutung. Die Zahl $\binom{n}{k}$ für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$ ist die Anzahl Möglichkeiten k Elemente aus einer Sammlung mit n Elementen auszuwählen. Formal ausgedrückt: Es gibt genau $\binom{n}{k}$ Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$, die k Elemente besitzen.

Binomischer Lehrsatz Für $w, z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(w+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w^{n-k} z^k.$$

Beweis des binomischen Lehrsatzes. Für $n = 0$ gilt die Aussage, da

$$(w+z)^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} 1 w^{0-k} z^k.$$

Angenommen die Aussage des Satzes gilt für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
(w+z)^{n+1} = (w+z)^n (w+z) &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w^{n-k} z^k \right) (w+z) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w^{n+1-k} z^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w^{n-k} z^{k+1} \\
&= w^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} w^{n+1-k} z^k + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} w^{n-j} z^{j+1} + z^{n+1} \\
&= w^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} w^{n+1-k} z^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} w^{n+1-k} z^k + z^{n+1} \\
&= w^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} w^{n+1-k} z^k + z^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} w^{n+1-k} z^k
\end{aligned}$$

unter Verwendung einer Indexverschiebung und der Additionsformel. $\square$