Aufgabe 1. Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heisst *Lipschitz-stetig*, falls ein $L \geq 0$ existiert, so dass $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ für alle $x, y \in D$ gilt.

a) Zeigen Sie, dass eine Lipschitz-stetige Funktion auch gleichmässig stetig ist.

b) Zeigen Sie, dass die Wurzelfunktion $[0, 1] \to \mathbb{R}$, gegeben durch $x \mapsto \sqrt{x}$ zwar gleichmässig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig ist.

c) Zeigen Sie, dass die Wurzelfunktion $[1, \infty) \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig und gleichmässig stetig ist.

Aufgabe 2. Sei $a \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-x^2-x-2}{x-2}$,

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{3e^{2x}+e^x+1}{2e^{2x}-1}$,

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^a}$,

d) $\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^a}$.

Wählen Sie dabei in jedem Fall einen geeigneten Definitionsbereich, auf dem die angegebene Formel eine Funktion definiert.

Aufgabe 3.

a) Zeigen Sie die folgenden Grössenordnungen für $x \to \infty$:

   i) $2x^3 + 3x^2 = O(x^3)$

   ii) $x^p = O(\exp(x))$ für jede natürliche Zahl $p > 0$

   iii) $\log(x) = O(x^{\frac{1}{p}})$ für jede natürliche Zahl $p > 0$

b) Zeigen Sie die folgenden Grössenordnungen für $x \to \infty$:

   i) $x^p = o(x^q)$ für natürliche Zahlen $0 < p < q$

   ii) $x^p = o(\exp(x))$ für alle natürlichen Zahlen $p > 0$

   iii) $\log(x) = o(x^p)$ für alle natürlichen Zahlen $p > 0$

c) Zeigen Sie die folgenden Grössenordnungen für $x \to 0$:

   i) $x^q = o(x^p)$ für alle natürlichen Zahlen $0 < p < q$

   ii) $\exp(x) = 1 + o(1)$

Aufgabe 4. Finden Sie ein Beispiel für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so, dass der Grenzwert der Folge $(f(n))_{n=0}^{\infty}$ existiert, aber nicht der Grenzwert $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Interpretieren Sie dies mit Blick auf Lemma 3.70. und der folgenden Frage: Wie übersetzt man für eine reelle Zahl A die Aussage

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

korrekt in eine Aussage über Konvergenz von Folgen?

Tipp: Aufgabe 8 von Übungsserie 5 könnte Inspiration für ein Gegenbeispiel liefern.

Aufgabe 5. Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge reeller Zahlen mit $0 \leq a_n$, so dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert. Zeigen Sie, dass dann auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ konvergiert.

Aufgabe 6. Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen reeller Zahlen konvergieren, und berechnen Sie die Grenzwerte. Überprüfen Sie Ihr Resultat mit Wolframalpha.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ für eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $|x|<1$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n-1}+1}{3^n}$

c) $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ für $k \in \mathbb{N}$,

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{5^n}$,

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{5^n}$.

Aufgabe 7. Sei $s > 1$ eine reelle Zahl. Benutzen Sie Proposition 4.14 um zu zeigen, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

konvergiert.