Aufgabe 1. (Alte Prüfungsaufgaben)

a) Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}$.

b) Konvergiert die folgende Reihe? Konvergiert sie absolut?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2-1}}.$$

Nennen Sie die Konvergenzsätze mit Namen, die Sie verwenden.

c) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Reihe

$$x + 4x^4 + 9x^9 + 16x^{16} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n^2}.$$

Falls Sie dabei ein Resultat über Konvergenzradien aus der Vorlesung benutzen, so schreiben Sie die vollständige Aussage dieses Resultats auf.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren. Berechnen Sie den Grenzwert, falls die Reihe konvergiert.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^4+n^2+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2^n)}{e^n}$

Aufgabe 3. Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen die gegen 0 konvergiert. Wir definieren

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+a_n) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n}(1+a_k)$$

im gleichen Sinn wie auch Reihen. Zeigen Sie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \iff \prod_{n=0}^{\infty}(1+a_n) \text{ konvergiert, mit Grenzwert} \neq 0.$$

Hinweis: Beweisen und benutzen Sie, dass $\frac{1}{2}x \leq \log(1+x) \leq x$ für genügend kleine $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt.

Aufgabe 4. Entscheiden Sie, welche der folgenden Reihen konvergieren.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log(\tfrac{n+1}{n})$ f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n)^n}$ g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \tfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\tfrac{1}{n^2}\right)$

Aufgabe 5. (Schwer)

a) Berechnen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1})^n}{n^2} x^n.$$

b) Zeigen Sie Konvergenz der Potenzreihe bei den Punkten $-R, R \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 6. (Leicht) Sei $w = re^{i\theta}$ ungleich Null. Zeigen Sie, dass die n-ten Wurzeln von w (nämlich die Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^n = w$) durch die n-Zahlen gegeben sind

$$\left\{ \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(2\pi\alpha + \frac{\theta}{n}\right)} \,\middle|\, \alpha = 0, \tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}, \dots, \tfrac{n-1}{n} \right\}.$$

Bemerkung: Wenn $w = 1$ ist, sind seine n-ten Wurzeln gegeben durch

$$\{e^{2\pi i\alpha} \,|\, \alpha = 0, \tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}, \dots, \tfrac{n-1}{n}\}$$

und werden die n-ten **Einheitswurzeln** genannt.

Aufgabe 7. (Leicht) Zeigen Sie für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ die Identität $\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i \frac{k}{n}} = 0$. Illustrieren Sie die Identität mit einer Skizze für $n = 2, 3, 5$.