Aufgabe 1. Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f_1(x) = \sqrt{1+x^2}$

b) $f_2(x) = \cos(\cos x)$

c) $f_3(x) = \exp\left(\frac{1}{1+x^4}\right)$

d) $f_4(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$

e) $f_5(x) = x^{\sin x}$ (definiert nur für $x > 0$)

Aufgabe 2. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge ohne isolierte Punkte, und seien $f, g \in C^n(D)$. Erklären Sie, warum $fg \in C^n(D)$ gilt, und zeigen Sie

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} .$$

Bemerkung: Das Ziel dieser Übung ist, den Beweis von Korollar 5.13 auszuformulieren.

Aufgabe 3. (Leicht) Sei a eine beliebige reelle Zahl, und $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{C}$ die durch $f(x) = x^a$ gegebene Funktion. Zeigen Sie, dass f stetig differenzierbar ist, und dass $f'(x) = ax^{a-1}$ gilt.

Bemerkung: In dieser Aufgabe verallgemeinern wir Korollar 5.14.

Aufgabe 4. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \operatorname{sgn}(x) x^{n+1}. \end{aligned}$$

für jede nichtnegative ganze Zahl $n \in \mathbb{N}_0$.

a) Zeigen Sie, dass f_n stetig ist.

b) Zeigen Sie, dass die Ableitungen $f_n', f_n^{(2)}, ..., f_n^{(n)}$ existieren.

c) Berechnen Sie $f_n^{(n)}$ und schließen Sie, dass die Inklusionen $C^{n+1}(\mathbb{R}) \subset C^n(\mathbb{R})$ strikte Inklusionen sind.

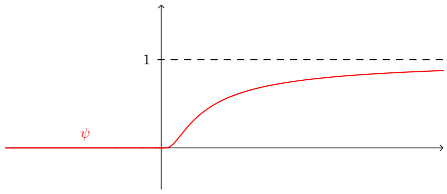

Figure 1: Graph der Funktion von Aufgabe 6.

Aufgabe 5. (Schwierig) Wir betrachten die Funktion $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\psi : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x \leq 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass ψ auf $\mathbb{R}$ glatt ist und dass alle seine Ableitungen bei 0 verschwinden.

Tipp 1: Zeigen Sie durch Induktion dass für $x > 0$ gilt

$$\psi^{(n)}(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right) f_n\left(\frac{1}{x}\right)$$

wobei $f_n(x)$ ein Polynom ist.

Tipp 2: Um die Ableitung bei $x = 0$ zu berechnen, verwenden Sie dass die Exponentialfunktion schneller wächst als jedes Polynom i.e.

$$\lim_{y \to \infty} \frac{y^n}{\exp(y)} = 0,$$

und setzen Sie $x = \frac{1}{y}$.

Aufgabe 6. (Schwierig) Für eine fixe reelle Zahl a betrachten wir die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} |x|^a \sin(\frac{1}{x}) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Bestimmen Sie für welche Wahl von $a \in \mathbb{R}$ die Funktion f stetig, ableitbar, oder sogar stetig ableitbar ist.