Aufgabe 1. (Warm up mit MC Fragen aus alten Prüfungen) Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \max(x, 1-x)$ ist

   A) nicht stetig.

   B) stetig aber nicht differenzierbar.

   C) differenzierbar aber nicht stetig differenzierbar.

   D) stetig differenzierbar aber nicht zweimal differenzierbar.

2. Sei $a < b$. Was gilt für alle Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$?

   A) Falls f stetig ist, dann ist f differenzierbar.

   B) Falls f monoton wachsend ist, dann ist f beschränkt.

   C) Falls es für jedes $x \in [f(a), f(b)]$ ein $c \in [a, b]$ gibt, so dass $f(c) = x$, so ist f stetig.

   D) Falls f ein Maximum und ein Minimum annimmt, dann ist f stetig.

Aufgabe 2. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe von l'Hôpital's Regel.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2 \sin(x)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{\cos x - 1}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^4 - 4^x}{\sin \pi x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} x^3 e^x$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

Aufgabe 3. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, derart, dass $f(x) = f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Zeigen Sie, dass eine reelle Zahl c existiert, mit $f(x) = c \cdot \exp(x)$.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass es keine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $f'(x) = \operatorname{sgn}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 5. (Alte Prüfungsaufgabe)

a) Sei $I = (a, b)$ ein Intervall mit $a < b$ in $\overline{\mathbb{R}}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass falls die Ableitung von f beschränkt ist, dann ist f Lipschitz-stetig, dass heisst es existiert eine Konstante $c > 0$ mit $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$ für alle $x, y \in I$.

b) Gilt die obige Aussage auch, falls der Definitionsbereich von f kein Intervall ist? Beweisen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 6. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Zeigen Sie, dass jedes lokale Minimum von f ein globales Minimum ist.

Erinnerung: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, und sei $f : I \to \mathbb{R}$. Dann heißt f *konvex*, wenn für alle $a, b \in I$ mit $a < b$ und alle $t \in (0,1)$, die Ungleichung

$$f\big((1-t)a + tb\big) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$$

gilt. Wir sagen, dass f *strikt konvex* ist, wenn die Ungleichung strikt ist.

Aufgabe 7. (Leicht, Teil b ist eine alte Prüfungsaufgabe)

a) Zeigen Sie dass $f : I \to \mathbb{R}$ konvex ist, genau dann wenn für alle $x \in (a,b) \subset I$ die Ungleichung
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$
gilt, und strikt konvex, wenn die obige Ungleichung strikt ist.

b) Sei f nun eine konvexe Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so dass $f(x) \leq 2023$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie dass f konstant ist.

Aufgabe 8. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ und $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0,1]$ mit $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$. Zeigen Sie, dass

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \cdots + t_nf(x_n)$$

gilt. Diese Ungleichung heisst *Jensen'sche Ungleichung.*

Folgern Sie daraus, dass für beliebige positive reelle Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Ungleichungen
$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$
gelten.