Aufgabe 1.

a) *Induktionsanfang* $n = 1$*:* Direkt sehen wir $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass die Gleichung für n stimmt und zeigen dann die Aussage für $n + 1$.

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) &\overset{\text{Annahme}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

b) *Induktionsanfang* $n = 1$*:* Direkt sehen wir $1^3 = 1^2$.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass die Gleichung für n stimmt und zeigen dann die Aussage für $n + 1$.

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 &\overset{\text{Annahme}}{=} (1 + 2 + \ldots + n)^2 + (n+1)^3 \\ &= (1 + 2 + \ldots + n)^2 + n(n+1)^2 + (n+1)^2 \\ &= (1 + 2 + \ldots + n)^2 + n(n+1)(n+1) + (n+1)^2 \\ &\overset{a)}{=} (1 + 2 + \ldots + n)^2 + 2(1 + 2 + \ldots + n)(n+1) + (n+1)^2 \\ &= ((1 + 2 + \ldots + n) + (n+1))^2. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Wir stellen fest, dass

$$V - E + F$$

immer gleich 2 ist!! Dies gilt sogar für Bilder, bei denen Linien gleichen Anfangs- und Endpunkt haben.
Wir beweisen dies durch *Induktion über die Anzahl Punkte* V.

Induktionsanfang $V = 1$*:* Das Bild besitzt also nur einen Punkt in der Ebene. Falls wir keine Linie haben ist $V = 1, E = 0, F = 1$, welches die Behauptung erfüllt. Jede Linie, welche beim Punkt beginnt und wieder dort endet, teilt das Blatt in zwei Flächen. Wir folgern dass es bei E Linien $F = E + 1$ Flächen gibt. Wir berechnen $V - E + F = 2$.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass die Aussage für $V - 1$ stimmt und zeigen dann die Aussage für V. Sei G ein Bild mit $V \geq 2$ Punkten E Linien und F Flächen Da $V \geq 2$ und das Bild zusammenhängend sein sollte, gibt es mindestens eine Linie L zwischen zwei verschiedenen Punkten. Wir benennen ihre Endpunkte A und B. Um Induktion anzuwenden, wollen wir ein Bild G' mit einem Punkt weniger haben, das Bild sollte aber immer noch zusammenhängend sein. Dies können wir erhalten, indem wir die Linie L *kontrahieren*. Das heisst, wir ziehen A, B zu einem einzelnen Punkt AB zusammen. Falls E_A Linien in A enden und E_B Punkte in B enden, dann enden $E_A + E_B - 1$ im Punkt AB (wir haben die Linie L gelöscht). Das Bild G' hat dann $V' = V - 1$ Punkte, $E' = E - 1$ Linien und $F' = F$ Flächen. Wir erhalten

$$V - E + F = V - 1 - (E - 1) + F = 2.$$

- Bilder wie oben werden in der Graphentheorie untersucht. Die Buchstaben kommen von G(raph), V(ertices) = Knoten in Deutsch, E(dges) = Kanten in Deutsch, F(aces) = Flächen in Deutsch.
  Siehe `https://de.wikipedia.org/wiki/Graph_(Graphentheorie)`.
- Weiterer Link: `https://de.wikipedia.org/wiki/Planarer_Graph`
- Unter `https://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/all.html` sind viele verschiedene Beweise dieser berühmten Aussage zu finden.

Aufgabe 3.

a) Die Relation $\neq$ erfüllt nur die Symmetrie Eigenschaft. Reflexivität ist nicht erfüllt, weil $a \neq a$ falsch ist. Ausserdem implizieren $a \neq b$, $b \neq c$ nicht $a \neq c$, da $a = c \neq b$ vorkommen kann.

b) Die Relation $<$ erfüllt nur die Transitivität und die Antisymmetrie. Reflexivität $a < a$ ist falsch. $a < b$ impliziert nicht $b < a$, weshalb auch die Antisymmetrie gilt, denn es gibt nichts zu überprüfen.

c) Die Relation Teilbarkeit $|$ erfüllt die Reflexivität und die Transitivität, aber nicht die Symmetrie: $2|4$, aber $4|2$ ist falsch.

Aufgabe 4. Seien $m, m' \in X$ Maxima von X. Wir zeigen $m = m'$. Da m ein Maximum von X ist, gilt $m' \leq m$. Da m' ein Maximum von X ist, gilt $m \leq m'$. Weil $\leq$ antisymmetrisch ist, gilt $m = m'$.

Aufgabe 5. Die definierte Relation ist keine Ordnungsrelation. Nimm, an der Kreis sei der Einheitskreis (so dass wir Koordinaten haben, um Punkte zu beschreiben). Sei $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (0, 1)$ und $P_3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Diese Punkte liegen auf dem Einheitskreis und $P_1 \leq P_2$, $P_2 \leq P_3$. Aus Transitivität muss auch $P_1 \leq P_3$ folgen. Es gilt aber auch $P_3 \leq P_1$, weil der Kreisbogen von P_3 nach P_1 im Gegenuhrzeigersinn kürzer ist. Dass heisst aus Antisymmetrie wäre $P_1 = P_3$. Dies ist nicht in der Definition der Relation in der Aufgabe enthalten.

Es gibt Ordnungsrelationen auf der Kreislinie. Ein triviales Beispiel ist: $P \leq Q$ gelte genau wenn $P = Q$ ist.