Aufgabe 1. (Wichtig)

a) Schauen Sie sich einige Videos auf dem Youtube-Kanal Polyquity EPFL an.

b) Gehen Sie auf die Webseite von Respekt @ ETH Zürich und informieren Sie sich, was Sie tun können sollten Sie ähnliches erleben oder beobachten.

Aufgabe 2. Sei $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch $f(x) = x$.

a) Beweisen Sie *ohne den Fundamentalsatz zu verwenden*, dass

$$\int_1^2 f(x)dx = \frac{3}{2}.$$

b) Verwenden Sie nun den Fundamentalsatz um zu zeigen dass

$$\int_1^2 f(x)dx = \frac{3}{2}.$$

Bemerkung: Diese Aufgabe soll zeigen wie nützlich der Fundamentalsatz bei der Berechnung von Integralen ist. Die Berechnung von Integralen mit dem Fundamentalsatz wird dann das Thema der Übungsserie 11 sein.

Lösung.

a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 2$ eine Zerlegung von $[1,2]$ definiert durch

$$x_k = 1 + \frac{k}{n}.$$

Sei $\ell_n : [1,2] \to \mathbb{R}$ die Treppenfunktion gegeben durch $\ell_n(x) = f(x_k) = x_k$, wobei $x \in [x_k, x_{k+1})$ für alle $0 \le k < n$ und $x \in [1,2)$, ausserdem sei $\ell_n(2) = x_{n-1}$. Wir haben $\ell_n \le f$.

Sei $u_n : [1,2] \to \mathbb{R}$ die Treppenfunktion, gegeben durch $u_n(x) = f(x_{k+1}) = x_{k+1}$, wobei $x \in [x_k, x_{k+1})$ für alle $0 \le k < n$ und $x \in [1,2)$, ausserdem $u_n(2) = x_n$. Wir haben $f \le u_n$.

Wir berechnen $\int_1^2 \ell_n dx$ und $\int_1^2 u_n dx$.

$$\int_1^2 \ell_n dx = \sum_{k=0}^{n-1} x_k(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \ell_n dx &= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} 1 + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(n + \frac{1}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2n^2}(2n^2 + n(n-1)) \\
&= \frac{1}{2n^2}(3n^2 - n) \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{2n}
\end{aligned}$$

Ähnlich erhalten wir

$$\int_1^2 u_n dx = \frac{3}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Somit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2} - \frac{1}{2n} &= \int_1^2 \ell_n dx \\
&\leq \sup \mathcal{L}(f) \\
&= \int_1^2 f dx \\
&= \inf \mathcal{U}(f) \\
&\leq \int_1^2 u_n dx \\
&= \frac{3}{2} + \frac{1}{2n}.
\end{aligned}$$

Weil n beliebig gross sein kann, schliessen wir $\int_1^2 f dx = \frac{3}{2}$.

b) Wir bemerken dass $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ eine Stammfunktion von $f(x) = x$ ist. Das Resultat folgt dann direkt von Korollar 7.7.

Aufgabe 3. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Beweisen Sie, dass

$$f = 0 \iff \int_a^b |f(x)| dx = 0$$

gilt.

Lösung. *⇒:* Diese Richtung ist klar, weil $f = 0$ eine Treppenfunktion ist.

$\Leftarrow$: Sei f stetig. Wir nehmen an, dass $f \neq 0$ und zeigen dann, dass das Integral $\int_a^b |f| dx$ nicht 0 sein kann.

Da auch $|f| \neq 0$, gibt es ein $x \in [a, b]$, so dass $|f(x)| = c \neq 0$. Durch die Stetigkeit von $|f|$ gibt es ein Intervall $B = (x - \delta, x + \delta)$ mit $\delta > 0$, so dass $|f|(B) \subseteq (c - \frac{c}{2}, c + \frac{c}{2})$. Falls x nahe beim Rand von $[a, b]$, also nahe bei a oder b ist, nehmen wir einfach $B = (x - \delta, x + \delta) \cap [a, b]$.

Für alle $y \in B$ ist nun $|f(y)| > \frac{c}{2}$, da $|f(y)| \in (c - \frac{c}{2}, c + \frac{c}{2})$. Die Treppenfunktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) = \begin{cases} \frac{c}{2}, & x \in B \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

erfüllt $g \leq |f|$. Ihr Integral ist

$$\int_a^b g dx = \text{Länge}(B) \cdot \frac{c}{2} > 0.$$

Da $g \leq |f|$, folgt $\int_a^b |f| dx \geq \int_a^b g dx > 0$.

Aufgabe 4. Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, so dass

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$$

gilt. Zeigen Sie, dass es ein $y \in [a, b]$ gibt, so dass $f(y) = g(y)$.

Tipp: Benutzen Sie Aufgabe 3.

Lösung. Wir zeigen die Kontraposition: Falls es kein $y \in [a, b]$ gibt, so dass $f(y) = g(y)$ ist, dann ist

$$\int_a^b f(x) dx \neq \int_a^b g(x) dx.$$

Aus $f(y) \neq g(y)$ für alle $y \in [a, b]$ folgt, dass entweder $f < g$ oder $g < f$. In der Tat, falls wir $f(y_1) < g(y_1)$ und $g(y_2) < f(y_2)$ finden, also $f(y_1) - g(y_1) < 0 < f(y_2) - g(y_2)$ finden wir mit dem Zwischenwertsatz auf die Funktion $f - g$ angewendet ein y zwischen y_1 und y_2 mit $f(y) - g(y) = 0$, was entgegen unserer Annahme ist.

Nehmen wir an, dass $g < f$ ist. Dann ist $f - g = |f - g| > 0$ und aus Aufgabe 4 folgt, dass

$$\int_a^b |f - g|(x) dx = \int_a^b (f - g)(x) dx > 0,$$

also auch $\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx$. Das Argument für $f < g$ ist analog.

Aufgabe 5. (Leicht) Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass es ein $y \in [a, b]$ gibt, so dass

$$f(y) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 4.

Lösung. Wir betrachten die konstante Funktion

$$g(y) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Per Konstruktion gilt

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

und wir folgern aus Aufgabe 4 dass es ein $y \in [a, b]$ gibt, so dass

$$f(y) = g(y) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Alternative Lösung (ohne Aufgabe 4 zu verwenden): Da f stetig ist und der Definitionsbereich ein abgeschlossenes, beschränktes Intervall ist, nimmt f ihr Maximum M und ihr Minimum m an. Seien x_M und x_m in $[a, b]$, so dass $f(x_M) = M$ und $f(x_m) = m$. Wir können abschätzen:

$$m(b-a) = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx = M(b-a)$$

und erhalten daraus

$$f(x_m) = m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M = f(x_M).$$

Mit dem Zwischenwertsatz finden wir ein y zwischen x_M und x_m, so dass $f(y) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$. Natürlich ist $y \in [a, b]$.

Aufgabe 6. (Leicht) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, und sei $f^* : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die erhalten wurde, indem der Wert von f an endlich vielen Punkten in $[a, b]$ abgeändert wurde. Zeigen Sie, dass f^* Riemann-integrierbar ist und dass

$$\int_a^b f\, dx = \int_a^b f^*\, dx.$$

Lösung. Man nehme zwei Treppenfunktionen $u, \ell \in \mathcal{SF}([a,b])$ derart, dass $\ell \leq f \leq u$. Man beachte, dass wir ℓ und u an endlich vielen Stellen ändern können, um zwei neue Treppenfunktionen $\ell^*, u^* \in \mathcal{SF}([a,b])$ zu erhalten, so dass $\ell^* \leq f^* \leq u^*$. In der Tat, können wir solch eine Treppenunktion ℓ^* definieren durch

$$\ell^*(x) = \begin{cases} \ell(x) & \text{falls } f(x) = f^*(x) \\ f^*(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

Da sich das Integral einer Treppenfunktion nicht ändert, wenn man ihren Wert an endlich vielen Punkten ändert, gilt

$$\int_a^b \ell\, dx = \int_a^b \ell^*\, dx \qquad \text{und} \qquad \int_a^b u\, dx = \int_a^b u^*\, dx.$$

Dies beweist, dass $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(f^*)$ und $\mathcal{U}(f) = \mathcal{U}(f^*)$, und das Ergebnis folgt durch Betrachten des Supremums und des Infimums.

Aufgabe 7. (Schwierig) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion und $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass es eine stetige Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ gibt, so, dass

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon.$$

Bemerkung: Das Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, dass jede Riemannintegrierbare Funktion "beliebig gut" mit einer stetigen Funktion approximiert werden kann.

Lösung. Sei $\varepsilon > 0$. Somit gibt es eine Treppenfunktion u mit

$$\int_a^b |f(x) - \ell(x)| dx = \int_a^b (f(x) - \ell(x)) dx < \frac{\epsilon}{2},$$

wobei wir benutzt haben, dass wir f beliebig genau von unten mit Treppenfunktionen approximieren können. Weil $f \geq \ell$ verschwindet der Absolutbetrag.

Sei $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ eine Zerlegung von $[0,1]$, so dass u auf jedem Intervall (x_k, x_{k+1}) konstant gleich $c_k \in \mathbb{R}$ ist. Wir ändern die Funktion ℓ zu einer stetigen Funktion v_δ, welche ähnliches Integral wie ℓ hat. Sei fürs Erste $\delta > 0$ beliebig. Wir setzen

$$v_\delta(x) = \begin{cases} c_k, & x \in [x_k, x_{k+1} - \delta] \\ c_k + \frac{x - x_{k+1} + \delta}{\delta} c_{k+1}, & x \in [x_{k+1} - \delta, x_{k+1}]. \end{cases}$$

für alle $0 \leq k \leq N-1$, v_δ ist stetig (zeichnen Sie den Graphen auf $[x_k, x_{k+2}]$).

Das Integral von v_δ ist

$$\int_a^b v_\delta(x)dx = \sum_{k=0}^{N-1} c_k(x_{k+1} - \delta - x_k) + \delta \frac{c_k + c_{k+1}}{2}.$$

Somit erhalten wir

$$\int_a^b |v_\delta(x) - \ell(x)|dx = \delta \sum_{k=0}^{N-1} |\frac{c_{k+1} - c_k}{2}| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

für $\delta = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{N-1} |c_{k+1} - c_k|}$.

Dieser Ausdruck ist nur dann nicht definiert, wenn alle c_k gleich sind. Dann ist aber ℓ global konstant und schon selbst stetig, wir wählen dann $v = \ell$.

Durch die Dreieckungleichung gilt schlussendlich

$$\int_a^b |f(x) - v_\delta(x)|dx < \int_a^b |f(x) - \ell(x)|dx + \int_a^b |\ell(x) - v_\delta(x)|dx = \epsilon.$$