**Aufgabe 1.** Üben Sie das Integrieren mit dem Integral Trainer. Das Ziel ist, dass Sie Integrale insbesondere mittels partieller Integration und Substitution sicher und schnell berechnen können. Als Anhaltspunkt für die zu erwartende Schwierigkeit an der Prüfung, betrachten Sie Aufgabe 2.

**Aufgabe 2.** (Alte Prüfungsaufgabe: Nur die Antwort wurde bewertet) Beachten Sie dass dies nur eine von mehreren Rechenaufgaben der Prüfung war. Sie sollten diese Aufgabe also einigermassen schnell lösen können.

1. Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int x^2 \cos x dx$.
2. Berechnen Sie das Integral $\int_1^4 \frac{\exp(\sqrt{t}+1)}{\sqrt{t}} dt$.
3. Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{1}{t^{2/3}+t^{1/2}} dt$ auf $\mathbb{R}_{>0}$.

**Lösung.**

1. Wir berechnen mit partieller Integration

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos x dx &= x^2 \sin(x) - \int 2x \sin(x) dx \\ &= x^2 \sin(x) - 2\left(x(-\cos(x)) - \int 1 \cdot (-\cos(x)) dx\right) \\ &= x^2 \sin(x) - 2\left(-x\cos(x) + \int \cos(x)\right) dx \\ &= (x^2-2)\sin(x) + 2x\cos(x) + C.\end{aligned}$$

2. Mit der Substituion $u = \sqrt{t}+1$ und $\frac{du}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{\exp(\sqrt{t}+1)}{\sqrt{t}} dt &= 2\int_2^3 \exp(u) du \\ &= 2\exp(u)|_2^3 = 2(e^3 - e^2).\end{aligned}$$

3. Wir setzen $u = t^{1/6}$ und erhalten $\frac{du}{dt} = \frac{1}{6} t^{-5/6} = \frac{1}{6} u^{-5}$ und damit $t^{2/3} = u^4$ und $t^{1/2} = u^3$. Wir setzen ein und berechnen

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{t^{2/3}+t^{1/2}} dt &= \int \frac{1}{u^4+u^3} 6u^5 du \\ &= 6\int \frac{u^2}{u+1} du \\ &= 6\int u - 1 + \frac{1}{u+1} du\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 6\left(\frac{1}{2}u^2 - u + \log(u+1) + C\right) \\
&= 3t^{1/3} - 6t^{1/6} + 6\log(t^{1/6}+1) + C
\end{aligned}
$$

**Aufgabe 3.** (Leicht) Berechnen Sie die Taylor-Approximationen der folgenden Funktionen bei $x = 0$ bis zur vierten Ordnung. Geben Sie die Fehlerterme und die Little-o- oder Big-O-Schreibweise genau an.

a) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

b) $f(x) = \sin(x)$

c) $f(x) = \log(1+x)$

**Lösung.**

a) Es gibt zwei Arten diese Taylorreihe zu berechnen. Der erste besteht darin, die geometrische Reihe wiederzuerkennen. Wir wollen hier aber die Standardmethode üben und berechnen deshalb die Ableitungen:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1-x} \\
f'(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} \\
f''(x) &= \frac{2}{(1-x)^3} \\
f'''(x) &= \frac{6}{(1-x)^4} \\
f''''(x) &= \frac{24}{(1-x)^5}
\end{aligned}
$$

Der Zähler kürzt sich also jeweils mit der Fakultät und wir erhalten mit Korollar 7.59

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + O(|x|^5).$$

b) Die Sinusfunktion ist glatt und die Ableitungen sind

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin(x) \\
f'(x) &= \cos(x) \\
f''(x) &= -\sin(x) \\
f'''(x) &= -\cos(x) \\
f''''(x) &= \sin(x).
\end{aligned}
$$

Da $\sin(0) = 0$ und $\cos(0) = 1$, erhalten wir wiederum mit Korollar 7.59

$$f(x) = x - \frac{x^3}{6} + O(|x|^5).$$

c) Wie zuvor: Wir berechnen die Ableitungen

$$\begin{aligned}
f(x) &= \log(1+x) \\
f'(x) &= \frac{1}{1+x} \\
f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} \\
f'''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} \\
f''''(x) &= -\frac{6}{(1+x)^3}.
\end{aligned}$$

und schliessen dass

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + O(|x|^5).$$