Aufgabe 1. Üben Sie weiter das Integrieren mit dem Integral Trainer. Das Ziel ist, dass Sie Integrale insbesondere mittels partieller Integration und Substitution sicher und schnell berechnen können.

Aufgabe 2. (Alte Prüfungsaufgabe) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = xy^2 + x, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Hinweis: Lesen Sie erst die Bemerkung 7.84 im Skript.

Lösung. Durch Separierung der Variablen erhalten wir

$$\frac{dy}{dx} = xy^2 + x = x(y^2 + 1),$$

woraus folgt, dass

$$\int \frac{1}{y^2+1} dy = \int x dx.$$

Aus der Formelsammlung können wir ablesen, dass

$$\arctan(y) = \frac{1}{2}x^2 + C,$$

und damit $y(x) = \tan\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)$. Wir bestimmen C durch den Anfangswert

$$1 = y(0) = \tan(C),\ C = \arctan(1) = \pi/4.$$

Insgesamt erhalten wir

$$y(x) = \tan\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4}\right).$$

Aufgabe 3. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' - \left(\frac{4}{x} + 1\right) y = x^4, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Lösung. Wir beginnen mit der Trennung der Variablen in der homogenen Gleichung.

$$y'_{\text{hom}} - \left(\frac{4}{x} + 1\right) y_{\text{hom}} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\iff \frac{y'_{\text{hom}}}{y_{\text{hom}}} = \left(\frac{4}{x} + 1\right) \\
&\iff \int \frac{y'_{\text{hom}}}{y_{\text{hom}}} = \int \left(\frac{4}{x} + 1\right) \\
&\iff \log |y_{\text{hom}}| = 4 \log x + x + C \\
&\iff |y_{\text{hom}}| = e^C e^x x^4 \\
&\iff y_{\text{hom}} = A e^x x^4
\end{aligned}$$

Die Variation der Konstanten liefert mit $y_{\text{part}} = A(x) e^x x^4$

$$\begin{aligned}
&y'_{\text{part}} - \left(\frac{4}{x} + 1\right) y_{\text{part}} = x^4 \\
&\iff A'(x) e^x x^4 = x^4 \\
&\iff A'(x) = e^{-x},
\end{aligned}$$

mit Lösung $A(x) = -e^{-x}$. Um die Konstante A zu bestimmen berechnen wir nun für $y = y_{\text{hom}} + y_{\text{part}}$

$$1 = y(1) = Ae^1 1^4 + A(1) e^1 1^4 = Ae - 1,$$

und somit $A = 2/e$. Dies liefert die Lösung $y(x) = \frac{2}{e} e^x x^4 - x^4$.

Aufgabe 4. Lösen Sie die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen (ODEs):

a) $u''(x) + u(x) = \sin(2x), \qquad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1.$
Hinweis: Suchen Sie nach einer speziellen Lösung der Form $a \sin(2x) + b \cos(2x)$.

b) $u''(x) + 4u(x) = \cos(2x), \qquad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0.$
Hinweis: Suchen Sie nach einer speziellen Lösung der Form $ax \cos(2x) + bx \sin(2x)$.

c) $u''(x) + u'(x) - 2u(x) = x^2, \qquad u(0) = 2, \quad u'(0) = 1.$
Hinweis: Suchen Sie nach einer speziellen Lösung der Form $ax^2 + bx + c$.

d) $u''(x) + 2u'(x) - 3u(x) = \cos(x) + x, \qquad u(0) = 1, \quad u'(0) = 1.$
Hinweis: Suchen Sie nach einer speziellen Lösung der Form $a \sin(x) + b \cos(x) + cx + d$.

Lösung. In dieser Aufgabe wollen wir uns vorallem auf die speziellen Lösungen $u_p(x)$ konzentrieren. Wir sind daher jeweils etwas kurz bei den Lösungen zum homogenen Problem. Diese kann man aber jeweils einfach mit Proposition 7.88 finden.

a) Wir setzen $u_p(x) = a\sin(2x) + b\cos(2x)$. Dann berechnen wir

$$u_p''(x) + u_p(x) = -3a\sin(2x) - 3b\cos(2x).$$

Wir wählen also $a = -\frac{1}{3}$ und $b = 0$ d.h.

$$u_p(x) = -\frac{1}{3}\sin(2x).$$

Wir suchen nun eine Lösung der Form $u(x) = v(x) + u_p(x)$ wobei $v(x)$ eine Lösung des homogenen Problems ist. Die Anfangsbedingungen für $v(x)$ folgen aus

$$0 = u(0) = v(0) + u_p(0) = v(0)$$

und

$$1 = u'(0) = v'(0) + u_p'(0) = v'(0) - \frac{2}{3}.$$

Wir müssen nun also eine Lösung für $v''(x) + v(x) = 0$ mit $v(0) = 0$ und $v'(0) = \frac{5}{3}$. Die allgemeine Lösung für DGL dieser Form ist $v(x) = A\sin(x) + B\cos(x)$. Die Anfangsbedingungen ergeben dann dass $B = 0$ und $A = \frac{5}{3}$. Wir schliessen dass

$$u(x) = \frac{5}{3}\sin(x) - \frac{1}{3}\sin(2x).$$

b) Wir setzen nun $u_p(x) = ax\cos(2x) + bx\sin(x)$ und berechnen dass

$$u_p''(x) + 4u(x) = 4b\cos(2x) - 4a\sin(2x).$$

Wir wählen also $b = \frac{1}{4}$ und $a = 0$ d.h.

$$u_p(x) = \frac{x}{4}\sin(2x).$$

Dies erfüllt $u_p(0) = 0$ und $u_p'(0) = 0$. Die Lösung des homogenen Problems ist dann $v(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x)$. Die Anfangsbedingungen ergeben $v(0) = B = 1$ und $v'(0) = 0 = -2A$. Entsprechend schliessen wir dass

$$u(x) = \cos(2x) + \frac{x}{4}\sin(2x).$$

c) Wir betrachten $u_p(x) = ax^2 + bx + c$ und berechnen

$$\begin{aligned} u_p''(x) + u_p'(x) - 2u(x) &= 2a + (2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c) \\ &= -2ax^2 + (2a - 2b)x + 2a + b - 2c \end{aligned}$$

Daher müssen wir $a = -\frac{1}{2}$ wählen, um x^2 zu erhalten. Um einen Term mit x zu vermeiden, benötigen wir $2a - 2b = 0$, d.h. $a = b = -\frac{1}{2}$. Schließlich benötigen wir $c = a + \frac{1}{2}b = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$, damit wir keinen konstanten Term erhalten. Somit gilt

$$u_p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}.$$

Die Lösung des homogenen Problems ist

$$v(x) = Ae^{-2x} + Be^x.$$

Nun setzen wir

$$u(0) = v(0) + u_p(0) = A + B - \frac{3}{4} = 2$$

und

$$u'(0) = v'(0) + u_p'(0) = -2A + B - \frac{1}{2} = 1.$$

Auflösen ergibt $A = \frac{5}{12}$ und $B = \frac{7}{3}$. Somit haben wir also

$$u(x) = \frac{5}{12}e^{-2x} + \frac{7}{3}e^x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = \frac{1}{12}\left(5e^{-2x} + 28e^x - 6x^2 - 6x - 9\right).$$

d) Wir gehen vor wie gehabt: Für $u_p(x) = a\sin(x) + b\cos(x) + cx + d$, berechnen wir

$$u_p''(x) + 2u_p'(x) - 3u_p(x) = -2(b + 2a)\sin(x) + 2(a - 2b)\cos(x) - 3cx - 3d + 2c.$$

Wählen wir $a = \frac{1}{10}$ und $b = -\frac{1}{5}$, sowie $c = -\frac{1}{3}$ und $d = -\frac{2}{9}$ so ergibt dies genau $\cos(x) + x$. Daher ist

$$u_p(x) = \frac{1}{10}\sin(x) - \frac{1}{5}\cos(x) - \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}.$$

Die allgemeine Lösung zum homogenen Problem ist

$$v(x) = Ae^{-3x} + Be^x.$$

Wir müssen nun noch die Konstanten bestimmen:

$$\begin{aligned} 1 &= u(0) = A + B - \frac{1}{5} - \frac{2}{9} \\ 1 &= u'(0) = -3A + B + \frac{1}{10} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Auflösen ergibt $A = \frac{17}{360}$ und $B = \frac{11}{8}$. Somit ist

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{17}{360}e^{-3x} + \frac{11}{8}e^x + \frac{1}{10}\sin(x) - \frac{1}{5}\cos(x) - \frac{1}{3}x - \frac{2}{9} \\ &= \frac{1}{360}\left(17e^{-3x} + 495e^x + 36\sin(x) - 72\cos(x) - 120x - 80\right). \end{aligned}$$

Aufgabe 5. (Alte Prüfungsaufgabe) Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung für zweimal stetig differenzierbare Funktionen $u : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$:

$$xu''(x) + 2u'(x) + \omega^2 xu(x) = 0,$$

wobei $\omega > 0$ eine fixe Konstante bezeichnet. Finden Sie alle beschränkten Lösungen dieser Differentialgleichung.

Tipp: Betrachten Sie die Funktion $v(x) = x\,u(x)$.

Lösung. Die Differentialgleichung, die die vorgeschlagene Funktion v erfüllt ist

$$v''(x) + \omega^2 v(x) = 0,$$

deren Lösungen bekanntlich $v(x) = c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x)$ sind, wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^2$. Daraus folgt, dass die Lösungen der ursprünglichen DGL

$$y(x) = c_1 \frac{\cos(\omega x)}{x} + c_2 \frac{\sin(\omega x)}{x},$$

sind, wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Die beschränkten Lösungen sind somit

$$y(x) = c\frac{\sin(\omega x)}{x},$$

für $c \in \mathbb{R}$.