Aufgabe 1. (Alte Prüfungsaufgabe) Finden Sie alle Lösungen $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differenzialgleichung

$$y' = e^{x-y},$$

die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind.

Lösung. Wir schreiben mit der Methode der Separation der Variablen die Differenzialgleichung in der Form

$$e^{y(x)}y'(x) = e^x$$

Die linke Seite ist $(e^{y(x)})' = e^x$, also ist y genau dann eine Lösung wenn

$$e^{y(x)} = e^x + C,$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und eine Konstante C. Die rechte Seite ist positiv für alle $x \in \mathbb{R}$ genau dann wenn $C \geq 0$. Also ist die allgemeine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung

$$y(x) = \log(e^x + C), \qquad C \geq 0.$$

Aufgabe 2. (Alte Prüfungsaufgabe) Finden Sie die Lösung $y\colon I \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$x^2y' = y^2, \quad y(1) = 2,$$

Lösung. Wir verwenden die Methode der Separation der Variablen:

$$\begin{aligned}
& \frac{dy}{dx}x^2 = y^2 \\
\Longrightarrow \quad & \frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x^2} \\
\Longrightarrow \quad & \int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x^2} \\
\Longrightarrow \quad & -\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + C = \frac{Cx-1}{x} \\
\Longrightarrow \quad & y = \frac{x}{1-Cx}.
\end{aligned}$$

Wir setzen den Anfangswert ein und lösen nach C auf:

$$2 = y(1)$$

$$= \frac{1}{1-C}$$

ergibt $C = \frac{1}{2}$. Somit folgt

$$y(x) = \frac{x}{x - \frac{1}{2}x} = \frac{2x}{2-x}.$$

Aufgabe 3. (Alte Prüfungsaufgabe) Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ für $x > 0$.

Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $u = y/x$.

Lösung. Nach Substitution können wir die Variablen separieren und erhalten

$$y(x) = x \sinh(\log(x) + C).$$

In der Prüfung wurde nur das Resultat gewertet. Wir geben trotzdem die Zwischenschritte an: Da $y = ux$, gilt

$$y' = u'x + u = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = u + \sqrt{1+u^2}.$$

Wir müssen also die folgende Differentialgleichung für u lösen:

$$u' = \frac{1}{x}\sqrt{1+u^2}.$$

Diese Differentialgleichung können wir mit Separation der Variablen lösen:

$$\begin{aligned}
& \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\sqrt{1+u^2} \\
\implies \quad & \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} du = \frac{1}{x} dx \\
\implies \quad & \int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} du = \int \frac{1}{x} dx \\
\implies \quad & \operatorname{arsinh}(u) = \log(x) + C \\
\implies \quad & u = \sinh(\log(x) + C) \\
\implies \quad & y = x \sinh(\log(x) + C).
\end{aligned}$$

Differentialgleichungen mit Potenzreihen In den folgenden zwei Aufgaben wollen wir eine neue Technik kennen lernen, wie wir Lösungen zu gewissen Differentialgleichungen finden können. Die Idee ist die Funktion als Taylorreihe zu schreiben, Term für Term abzuleiten, dies dann in die Differentialgleichung einzusetzen und daraus Bedingungen für die Koeffizienten herzuleiten.

Konkreter, gehen wir wie folgt vor:

1. Wir nehmen an, die Lösung $y(x)$ einer Differentialgleichung kann als Taylorreihe geschrieben werden, also
$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$
2. Wir differenzieren die Taylorreihe Term für Term und erhalten
$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$
und
$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$
3. Wir setzen dies in die Differentialgleichung ein und vereinfachen (insbesondere müssen wir vielleicht die Indizes der Reihen neu definieren).
4. Wir vergleichen die Koeffizienten mit gleichen Potenzen von x um Werte für a_n zu bestimmen.
5. Wir setzen die Koeffizienten wieder in die Taylorreihe ein.

Aufgabe 4. Verwenden Sie das Lösungsverfahren mit der Taylorreihe um eine Lösung der Differentialgleichung
$$y'(x) + 2xy(x) = 0$$
zu finden. Kennen Sie eine Funktion deren Taylorreihe genau jene ist die Sie als Lösung erhalten haben? Überprüfen Sie dass ihre Lösung stimmt indem Sie diese Funktion in die Differentialgleichung einsetzen.

Hinweis: Falls Sie keine solche Funktion kennen, lösen Sie die Differentialgleichung mit Separation der Variablen und kontrollieren Sie dass die Lösungen übereinstimmen.

Lösung. Wir setzen die Taylorentwicklungen von $y(x)$ und $y'(x)$ in die Differentialgleichung ein. Wir erhalten
$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^{n+1} \\
&= a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^{n+1} \\
&= a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) a_{n+2} x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^{n+1} \\
&= a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2) a_{n+2} + 2 a_n \right) x^{n+1}.
\end{aligned}
$$

Wir sehen also dass

$$a_1 = 0$$

und

$$a_{n+2} = -\frac{2}{n+2} a_n.$$

Es folgt direkt dass $a_n = 0$ für alle n ungerade. Weiter gilt

$$
\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{2}{2} a_0 = -a_0 \\
a_4 &= -\frac{2}{4} a_2 = \frac{1}{2} a_0 \\
a_6 &= -\frac{2}{6} a_4 = -\frac{1}{6} a_0 \\
&\vdots \\
a_{2k} &= a_0 \frac{(-1)^k}{k!}.
\end{aligned}
$$

Somit haben wir eine Lösung gefunden, denn

$$y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k} = a_0 \sum_{k=0} \frac{1}{k!} (-x^2)^k = a_0 \exp(-x^2).$$

Aufgabe 5. (Bessel Gleichung mit $\alpha = 0$) Finden Sie eine Lösung für die Differentialgleichung

$$x^2 y + x y' + x^2 y = 0.$$

Bemerkung: Dies ist die DGL von Beispiel 7.73, Punkt 4 für $\alpha = 0$.

Lösung. Wir setzen die Taylorentwicklungen in die Differentialgleichung ein:

$$0 = x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x \sum_{n=1} n a_n x^{n-1} + x^2 \sum_{n=0} a_n x^n$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \\
&= a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(n(n-1)a_n + n a_n + a_{n-2}\right) x^n \\
&= a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 a_n + a_{n-2}) x^n.
\end{aligned}
$$

Wir schliessen also dass

$$a_1 = 0$$

und dass für $n \geq 2$,

$$a_n = -\frac{1}{n^2} a_{n-2}.$$

Es folgt insbesondere dass alle Koeffizienten a_n für n ungerade Null sein müssen. Für die geraden Koeffizienten, beobachten wir dass

$$
\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{1}{2^2} a_0 \\
a_4 &= -\frac{1}{4^2} a_2 = \frac{1}{4^2 2^2} a_0 = \\
a_6 &= -\frac{1}{6^2} a_4 = -\frac{1}{6^2 4^2 2^2} a_0 = -\frac{a_0}{(6 \cdot 4 \cdot 2)^2} = -\frac{a_0}{(2^3 3!)^2} = -\frac{a_0}{2^{2 \cdot 3}(3!)^2} \\
&\vdots \\
a_{2k} &= \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}(k!)^2}
\end{aligned}
$$

Wir schliessen also dass

$$y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k}.$$

Mit Mathematica oder einem ähnlichen Tool, können wir diese Funktion veranschaulichen. Dazu betrachten wir den Fall $a_0 = y(0) = 1$ und den Mathematica-code

```
y[x_] := Sum[(-1)^k/((2)^(2 k) (k!)^2) x^(2 k), {k, 0, 20}];
Plot[y[x], {x, -15, 15}, PlotRange -> 1]
```

Das Ergebnis kann man in Abbildung 1 sehen.

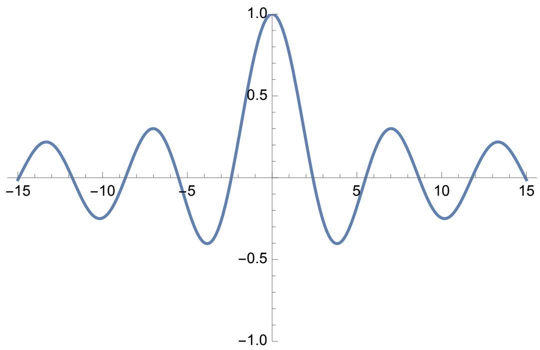

Figure 1: Lösung $y(x)$ mit den ersten 20 Termen.