Aufgabe 1. Seien X und Y Mengen, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf Y. Sei $f : X \to Y$ eine Funktion, so dass

$$x_1 \sim x_2 \implies f(x_1) \equiv f(x_2)$$

für alle x_1, x_2 gilt. Zeigen Sie, dass es eine eindeutig bestimmte Abbildung $g : X/_\sim \to Y/_\equiv$ gibt, die

$$g([x]_\sim) = [f(x)]_\equiv$$

für alle $x \in X$ erfüllt.[1]

1. Angenommen $f : X \to Y$ sei surjektiv. Folgt daraus, dass auch g surjektiv ist?
2. Angenommen $f : X \to Y$ sei injektiv. Folgt daraus, dass auch g injektiv ist?
3. Angenommen $g : X/_\sim \to Y/_\equiv$ sei surjektiv. Folgt daraus, dass auch f surjektiv ist?
4. Angenommen $g : X/_\sim \to Y/_\equiv$ sei injektiv. Folgt daraus, dass auch f injektiv ist?

Lösung. *Die Funktion g ist wohldefiniert:* Dies ist genau die Annahme

$$x_1 \sim x_2 \implies f(x_1) \equiv f(x_2).$$

1. Sei $f : X \to Y$ surjektiv. Sei $[y]_\equiv$ eine beliebige Äquivalenzklasse in $Y/_\equiv$. Wir nehmen einen beliebigen Repräsentanten $y \in Y$ dieser Äquivalenzklasse. Da f surjektiv ist, gibt es ein Element $x \in X$ so dass $f(x) = y$. Sei nun $[x]_\sim$ die Äquivalenzklasse welche x enthält. Dann gilt per Konstruktion

   $$g([x]_\sim) = [f(x)]_\equiv = [y]_\equiv.$$

   Also ist g surjektiv.

2. *Injektivität von g folgt nicht.* Wir geben ein Gegenbeispiel: Seien $X = Y = \{0, 1\}$ und $f : X \to Y$ definiert durch die Identität $f(x) = x$, welche sicherlich injektiv ist. Auf X definieren wir $\sim$ als die Gleichheit $=$ und auf Y definieren wir $\equiv$ als die maximale Äquivalenzrelation, in welcher alle Elemente äquivalent sind. Dann können wir $X/_\sim$ mit X identifizieren und $Y/_\equiv$ mit der Menge die genau ein Element hat. Dann ist $g : \{0, 1\} \to \{0, 1\}/_\equiv$ gegeben durch $g(0) = [0]_\equiv = [1]_\equiv = g(1)$. Also ist g nicht injektiv.

[1] Falls Du dies noch nicht getan hast, solltest Du dir vielleicht noch den Eintrag `https://forum.math.ethz.ch/t/exercise-sheet-1/3011?u=retoka` im Forum durchlesen.

3. *Surjektivität von f folgt nicht.* Wir geben wieder ein Gegenbeispiel: Seien $X = \{0\}$, $Y = \{0,1\}$ und $f : X \to Y$ definiert durch $f(0) = 0$, welche sicherlich nicht surjektiv ist. Auf X definieren wir $\sim$ als die Gleichheit $=$ und auf Y definieren wir $\equiv$ als die maximale Äquivalenzrelation. Dann ist $g : \{0\} \to \{0,1\}/_{\equiv}$ gegeben durch $g(0) = [0]_{\equiv} = [1]_{\equiv}$. Also ist g eine Bijektion zwischen einelementigen Mengen, darum auch surjektiv.

4. *Injektivität von f folgt nicht.* Wir geben noch ein letztes Gegenbeispiel: $X = \{0,1\}$, $Y = \{0\}$ und $f : X \to Y$ definiert durch $f(0) = 0$, welche sicherlich nicht injektiv ist. Auf X definieren wir $\sim$ als die maximale Äquivalenzrelation und auf Y definieren wir $\equiv$ als die Gleichheit $=$. Dann ist $g : \{0,1\}/_{\sim} \to \{0\}$ gegeben durch $g([0]_{\sim}) = 0 = g([1]_{\sim})$. Also ist g eine Bijektion zwischen einelementigen Mengen, darum auch injektiv.

Aufgabe 2. Entscheiden Sie für sich, welche der folgenden Aussagen wahr sind, und welche falsch.
Seien X und Y Mengen, und sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Seien A, A_1, A_2 Teilmengen von X, und B, B_1, B_2 Teilmengen von Y.

(1) $f(A_1) \cup f(A_2) = f(A_1 \cup A_2)$

(2) $\cancel{f(A_1) \cap f(A_2) = f(A_1 \cap A_2)}$

(3) $\cancel{f^{-1}(f(A)) = A}$

(4) $f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cup B_2)$

(5) $f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cap B_2)$

(6) $\cancel{f(f^{-1}(B)) = B}$

Welche der falschen Aussagen sind wahr, wenn man zusätzlich annimmt, dass es sich bei f um eine injektive bzw eine surjektive Funktion handelt?

Lösung.

(1) *Das ist wahr!* Sei $y \in f(A_1 \cup A_2)$, dann gibt es ein $x \in A_1 \cup A_2$, so dass $f(x) = y$. Das beduetet, dass $x \in A_1$ oder $x \in A_2$ ist. Also $f(x) \in f(A_1)$ oder $f(x) \in f(A_2)$. Somit erhalten wir dass $y = f(x) \in f(A_1) \cup f(A_2)$. Dies beweist $f(A_1 \cup A_2) \subseteq f(A_1) \cup f(A_2)$.
Andererseits sei $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$, dann ist $y \in f(A_1)$ oder $y \in f(A_2)$. Also gibt es ein $x \in A_1$, so dass $f(x) = y$, oder es gibt ein $x \in A_2$, so dass $f(x) = y$. Somit gibt es ein $x \in A_1 \cup A_2$, so dass $f(x) = y$. Dies beweist $f(A_1) \cup f(A_2) \subseteq f(A_1 \cup A_2)$.
Daraus schliessen wir dass $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

(2) *Das ist falsch!* Sei $X = \{0,1\}$ mit disjunkten Teilmengen $A_1 = \{0\}$ und $A_2 = \{1\}$. Sei $Y = \{0\}$ und $f : X \to Y$ definiert durch $f(0) = 0$, $f(1) = 0$. Wir haben

$$f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset \neq \{0\} = f(A_1) \cap f(A_2).$$

Die Funktion f ist surjektiv, also kann das Resultat auch nicht korrekt sein wenn wir zusätzlich annehmen, dass die Funktion surjektiv ist.

Wir überprüfen (2), wenn f injektiv ist: Sei $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$, dann gibt es $x_1 \in A_1$ und $x_2 \in A_2$, so dass $f(x_1) = f(x_2) = y$ gilt. Da f injektiv ist, ist $x_1 = x_2 \in A_1 \cap A_2$. Also $y = f(x_1) = f(x_2) \in f(A_1 \cap A_2)$. Daraus haben wir $f(A_1) \cap f(A_2) \subseteq f(A_1 \cap A_2)$ für injektive Funktionen f.

Sei $y \in f(A_1 \cap A_2)$, dann gibt es $x \in A_1 \cap A_2$, so dass $f(x) = y$ gilt. Also ist $f(x) \in f(A_1)$ und $f(x) \in f(A_2)$ somit $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$. Bemerke, dass wir hier Injektivität für diese Inklusion nicht verwendet haben. Die Inklusion $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$ gilt also für beliebige Funktionen.

Wir schliessen, dass $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ für injektive Funktionen.

(3) *Das ist falsch!* Betrachte dasselbe Gegenbeispiel wie in (2). Dann ist

$$f^{-1}(f(A_1)) = f^{-1}(f(\{0\})) = f^{-1}(\{0\}) = \{0, 1\} \neq A_1.$$

Wiederum schliesst das Gegenbeispiel aus, dass es für surjektive Funktionen stimmen könnte.

Wir überprüfen (3), wenn f injektiv ist: Sei $x \in f^{-1}(f(A))$, also $f(x) \in f(A)$. Dann gibt es ein $a \in A$, so dass $f(x) = f(a)$. Wegen Injektivität ist $x = a$, also $x \in A$. Daraus folgt, dass $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$ für injektive Funktionen f.

Sei $x \in A$, dann ist $f(x) \in f(A)$. Also auch $x \in f^{-1}(f(A))$. Wir haben Injektivität nicht benutzt, also folgt $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ für beliebige Funktionen f.

Wir schliessen, dass $f^{-1}(f(A)) = A$ für injektive Funktionen.

(4) *Das ist wahr!* Sei $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$, dann ist entweder $f(x) \in B_1$ oder $f(x) \in B_1$. In anderen Worten $f(x) \in B_1 \cup B_2$. Also genau dann wenn $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$.

(5) *Das ist wahr!* Sei $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$, dann ist $f(x) \in B_1$ und $f(x) \in B_2$. In anderen Worten $f(x) \in B_1 \cap B_2$. Also genau dann wenn $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$.

(6) *Das ist falsch!* Sei $X = \{0\}, Y = \{0, 1\}, B = \{1\} \subset Y$ und $f : X \to Y$ definiert durch $f(0) = 0$. Dann ist

$$f(f^{-1}(B)) = f(\emptyset) = \emptyset \neq B.$$

Diese Funktion ist injektiv, die Behauptung kann also auch mit der zusätzlichen Annahme der Injektivität nicht stimmen.

Wir überprüfen (6), wenn f surjektiv ist: Sei $y \in f(f^{-1}(B))$, also gibt es ein $x \in f^{-1}(B)$, so dass $f(x) = y$. Aber aus $x \in f^{-1}(B)$ folgt $f(x) \in B$. Das heisst, $f(x) = y \in B$. Daraus folgt, dass $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ für beliebige Funktionen f.

Sei $y \in B$. Wegen der Surjektivität von f finden wir ein $x \in B$, so dass $f(x) = y$. Aus $f(x) = y \in B$ folgt aber, dass $x \in f^{-1}(B)$ ist. Also $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$. Daraus folgt, dass $B \subseteq f(f^{-1}(B))$ für surjektive Funktionen f.

Wir schliessen, dass $f(f^{-1}(B)) = B$ für surjektive Funktionen.

Aufgabe 3. In dieser Übung zeigen wir die Existenz und Einzigartigkeit einer bijektiven Funktion $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit der Eigenschaft $(\sqrt{a})^2 = a$ für alle $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

a) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$: $x < y$ äquivalent zu $x^2 < y^2$ ist.

b) *Eindeutigkeit:* Leiten Sie aus Schritt 1 ab, dass es für jedes $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ höchstens ein Element $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ geben kann, das $c^2 = a$ erfüllt.

c) *Existenz:* Für eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ betrachte die nichtleeren Teilmengen

$$X = \{x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid x^2 \leq a\}, \qquad Y = \{y \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid y^2 \geq a\},$$

und wende das Vollständigkeitsaxiom an, um $c \in \mathbb{R}$ mit $x \leq c \leq y$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$ zu finden. Beweisen Sie, dass $c \in X$ und $c \in Y$, um zu folgern, dass sowohl $c^2 \leq a$ als auch $c^2 \geq a$ gelten, also $c^2 = a$.
Hinweis. Wenn durch Widerspruch $c \notin X$ ist (d.h. $c^2 > a$), dann kann man eine geeignet kleine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ finden, so dass $(c - \varepsilon)^2 \geq a$. Also $c - \varepsilon \in Y$, was $y \geq c$ für jedes $y \in Y$ widerspricht. Der Fall von $c \notin Y$ ist analog.

Wir nennen *Quadratwurzelfunktion* die Funktion $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die jedem $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Zahl $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ zuordnet, die durch die obige Konstruktion eindeutig bestimmt ist. Wir stellen fest, dass $c^2 = a$, und wir nennen $c = \sqrt{a}$ die *Quadratwurzel* von a. Zeigen Sie:

d) *Steigend:* Die Funktion $\sqrt{\cdot}$ ist steigend: Für $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $x < y$, gilt die Ungleichung $\sqrt{x} < \sqrt{y}$.

e) *Bijektivität:* Die Funktion $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist bijektiv.

f) *Multiplikativität:* Für alle $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$.

g) *Zwei Lösungen:* Zeigen Sie, dass es für $a > 0$ genau zwei reelle Lösungen der Gleichung $x^2 = a$ gibt. Wieviele gibt es für $a = 0$ und für $a < 0$?

Lösung.

a) Wir wollen Folgerung (h) auf Seite 15 des Skripts verwenden, jedoch mit einer strikten Ungleichung:

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$. Falls $x > 0$ und $y < z$, dann gilt $xy < xz$.

Beweis: Die Folgerung (h) gibt $xy \leq xz$. Falls aber $xy = xz$ wäre, dann könnten wir x kürzen (da $x \neq 0$ ist). Doch $y = z$ widerspricht der Annahme dass $y < z$.

Zurück zur Aufgabe: Zweimal die strikte Folgerung (h) auf $0 < x < y$ angewendet impliziert

$$x^2 = x \cdot x < x \cdot y < y \cdot y = y^2.$$

Umgekehrt, um $x^2 < y^2 \implies x < y$ zu zeigen, beweisen wir, dass aus $x \geq y$ die Ungleichung $x^2 \geq y^2$ folgt. Dies ist eine Anwendung der Beweistechnik $A \Rightarrow B$ ist äquivalent zu (nicht B) $\Rightarrow$ (nicht A). Wieder zweimal (die normale) Folgerung (h) ergibt

$$x^2 = x \cdot x \geq x \cdot y \geq y \cdot y = y^2.$$

b) Die Aussage ist äquivalent zur Aussage, dass die Abbildung $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto x^2$ injektiv ist. In (a) haben wir in der Tat bewiesen, dass falls $x \neq y$ (ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x < y$), dann auch $x^2 < y^2$ ist, also $x^2 \neq y^2$.

c) Die Voraussetzungen des Vollständigkeitsaxioms sind erfüllt: Sei $x \in X$ und $y \in Y$ beliebig, dann folgt aus

$$x^2 \leq a \leq y^2$$

und dann mit Teilaufgabe (a), dass $x \leq y$ gilt. Wir schliessen, dass es ein $c \in \mathbb{R}$ so dass

$$x \leq c \leq y \qquad \text{für alle } x \in X \text{ und } y \in Y.$$

Wir wollen nun beweisen, das $c^2 = a$ ist. Wir tun dies, indem wir zeigen, dass $c^2 \geq a$ und $c^2 \leq a$ ist, also $c \in X$ und $c \in Y$.

Wir beweisen $c \in X$: Wir nehmen an, dass $c \notin X$ wäre, also $c^2 > a$. Unter dieser Annahme suchen und finden wir ein $\epsilon > 0$, so dass $c - \epsilon \in Y$. Da aber $c > c - \epsilon$, widerspricht dies dem obigen Resultat dass $c \leq y$ für alle $y \in Y$. Daraus folgt, dass unsere Annahme $c \notin X$ falsch war und daher $c \in X$ gelten muss.

Es bleibt uns also noch, ein entsprechendes $\epsilon > 0$ zu finden. Konkret suchen wir also $\epsilon > 0$, so dass $(c - \epsilon)^2 \geq a$. Wir bemerken erst einmal, dass

$$(c - \epsilon)^2 = c^2 - 2c\epsilon + \epsilon^2 > c^2 - 2c\epsilon.$$

Da wir annehmen, dass $c^2 > a$, ist $c > 0$, der Ausdruck $\frac{c^2-a}{2c}$ definiert und $\frac{c^2-a}{2c} > 0$. Wir können also ein $\epsilon > 0$ finden, so dass $\epsilon < \frac{c^2-a}{2c}$. Für so ein ϵ sehen wir dass

$$(c-\epsilon)^2 > c^2 - 2c\epsilon > c^2 - 2c\frac{c^2-a}{2c} = a,$$

genau wie gefordert.

Analog beweisen wir $c \in Y$: Wir nehmen an dass $c \notin Y$ wäre, also $c^2 < a$, und suchen ein $\epsilon > 0$ so dass $c + \epsilon \in X$. Dies widerspricht dann wiederum $x \leq c$ für alle $x \in X$. Konkret suchen wir also ein $\epsilon > 0$, so dass $(c+\epsilon)^2 \leq a$ gilt. Wir berechnen also

$$(c+\epsilon)^2 = c^2 + 2\epsilon c + \epsilon^2.$$

Wir nehmen erst einmal an, dass $\epsilon < 1$. Durch Multiplikation mit ϵ folgt direkt, dass $\epsilon^2 < \epsilon$. Daher gilt in diesem Fall

$$(c+\epsilon)^2 = c^2 + 2\epsilon c + \epsilon^2 < c^2 + 2\epsilon c + \epsilon = c^2 + \epsilon(2c+1).$$

Wir wollen nun, dass dies kleiner oder gleich a ist. Da $c \geq 0$, ist $2c + 1 > 0$. Der Ausdruck $\frac{a-c^2}{2c+1}$ ist somit für alle c definiert und durch die Annahme dass $c^2 < a$, gilt weiter $\frac{a-c^2}{2c+1} > 0$. Sei nun $\epsilon < \frac{a-c^2}{2c+1}$. Dann haben wir

$$(c+\epsilon)^2 < c^2 + \epsilon(2c+1) < c^2 + \frac{a-c^2}{2c+1}(2c+1) = a.$$

Wir folgern dass für $\epsilon < 1$ und $\epsilon < \frac{a-c^2}{2c+1}$ tatsächlich $c + \epsilon \in X$ gilt.

Wir schliessen $c^2 = a$. Die Wurzel ist definiert als $\sqrt{a} = c$.

d) Direkt mit Teilaufgabe (a) finden wir $\sqrt{x} < \sqrt{y} \iff \sqrt{x}^2 < \sqrt{y}^2$. Die Aussage folgt mit $\sqrt{x}^2 = x$ und $y = \sqrt{y}^2$.

e) Analog wie aus (a) Teilaufgabe (b) folgt, schliessen wir auf die Injektivität der Wurzel aus Teilaufgabe (d). Surjektivität folgt daraus, dass für beliebiges $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, a^2 durch die Wurzel auf a gesendet wird.

   Alternativ, die Abbildung $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, welche x nach x^2 sendet ist eine Inverse für $\sqrt{\cdot}$.

f) Wir haben

$$(\sqrt{x}\sqrt{y})^2 = (\sqrt{x}\sqrt{y})(\sqrt{x}\sqrt{y}) = \sqrt{x}^2\sqrt{y}^2 = xy.$$

   Die Zahl $\sqrt{xy}$ erfüllt per Definition, dass ihr Quadrat xy ist. Aus der in (b) bewiesenen Eindeutigkeit, können wir $\sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{xy}$ schliessen.

g) Weil $(-x)^2 = (-1)^2 x^2 = x^2$ gilt, ist x genau dann eine Lösung von $x^2 = a$ wenn $-x$ eine Lösung von $x^2 = a$ ist. Weil es nur eine einzige Lösung > 0 gibt, gibt es nur genau eine Lösung < 0. Also 2 Lösungen im Gesamten. Für $a = 0$, gibt es natürlich genau eine Lösung, da $-0 = 0$ gilt. Für $a < 0$ gibt es keine Lösung da dies Folgerung (f) auf Seite 15 widersprechen würde.

Aufgabe 4. Welche der folgenden Teilmengen sind offen? Welche abgeschlossen? Begründen Sie.

(a) Der Punkt $A = \{0\}$ in $\mathbb{R}$,

(b) Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$,

(c) Das Intervall $C = [0, \infty)$ in $\mathbb{R}$,

(d) Das Intervall $D = (0, \infty)$ in $\mathbb{R}$,

(e) Die Menge $E = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n > 0 \right\}$ in $\mathbb{R}$,

(f) Die Menge $F = E \cup \{0\}$ in $\mathbb{R}$.

Lösung. Erinnern Sie sich, das Abgeschlossenheit getestet wird, indem wir das Komplement auf Offenheit analysieren.

(a) *A ist nicht offen:* Ein Intervall der Form $(-r, r)$ mit $r > 0$ ist nie ganz in A enthalten. Zum Beispiel gilt für jedes r, dass $\frac{r}{2} \in (-r, r)$ ist, aber $\frac{r}{2} \notin A$.

A ist abgeschlossen: Sei x ein Element in $A^c = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Das Intervall $(x - |x|, x + |x|)$ liegt vollständig in A^c. Denn für $y \in (x - |x|, x + |x|)$ gilt $|x - y| < |x|$ und darum nach der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$|y| = |x - (x - y)| \geq |x| - |x - y| > 0.$$

Also $y \neq 0$, $y \in A^c$.

(b) *B ist nicht offen:* Gleich wie (a).

B ist abgeschlossen: Sei x ein Element in $B^c = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Sei r der Abstand von x zur nächstgelegenen ganzen Zahl. Da $x \notin \mathbb{Z}$, haben wir $r > 0$. Das Intervall $(x - r, x + r)$ liegt per Konstruktion von r vollständig in B^c. Denn für $y \in (x - r, x + r)$ gilt $|x - y| < r$ und darum gilt für jedes $k \in \mathbb{Z}$ nach der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$|y - k| = |x - k - (x - y)| \geq \underbrace{|x - k|}_{\geq r} - \underbrace{|x - y|}_{< r} > 0.$$

Darum ist $y \notin \mathbb{Z}$, also $y \in B^c$.

(c) *C ist nicht offen:* Gleich wie (a), der Punkt $-\frac{r}{2}$ ist nie in C für jedes $r > 0$.

C ist abgeschlossen: Dass das Intervall $C^c = (-\infty, 0)$ ist offen, beweist man genau gleich wie in (a), dass $A^c = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ offen ist.

(d) *D ist offen:* Wie wie Teilaufgabe (c), zweiter Teil.

D ist nicht abgeschlossen: Das Intervall $D^c = (-\infty, 0]$ ist nicht offen wie in Teilaufgabe (c), erster Teil.

(e) *E ist nicht offen:* Um den Punkt $1 \in E$ gibt es kein Intervall $(1-r, 1+r)$, so dass $(1-r, 1+r) \subset E$: Zum Beispiel ist für beliebiges $r > 0$ der Punkt $1 + \frac{r}{2}$ in $(1-r, 1+r)$, aber nicht in E.

E ist nicht abgeschlossen: Um den Punkt $0 \in E^c$ gibt es kein Intervall $(-r, r)$, so dass $(-r, r) \subset E^c$: Zum Beispiel ist für beliebiges $r > 0$ der Punkt $\frac{1}{n}$ in $(-r, r)$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < r$, aber $\frac{1}{n}$ ist in E, also nicht in E^c.

(f) *F ist nicht offen:* Aus demselben Grund, dass E nicht offen ist.

F ist abgeschlossen: Für $x \in \mathbb{R}$ mit $x < 0$ ist das Intervall $(x-r, x+r)$ mit $r = |x|$ vollständig in F^c enthalten. Genauso für $x > 1$ ist das Intervall $(x-r, x+r)$ mit $r = x - 1$ vollständig in F^c enthalten. Falls $x \in F^c$ mit $0 < x < 1$ ist, dann liegt x genau zwischen einem Paar $\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}$ für ein eindeutiges $n \in \mathbb{N}, n > 0$. Sei $r = \min\{|x - \frac{1}{n+1}|, |x - \frac{1}{n}|\} > 0$. Dann ist $(x-r, x+r)$ vollständig in F^c enthalten.

Aufgabe 5. Schreiben Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen für $z \in \mathbb{C}$ in der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(a)	$z = (2+3i)(2+i)$	(c)	$z = \frac{4+3i}{2-i}$	(e)	$z^3 = i$
(b)	$z = (2-i)^3$	(d)	$z = \frac{2-i}{4+3i}$	(f)	$z^2 + 3 + 4i = 0$

Lösung.

(a) Wir rechnen $z = (2+3i)(2+i) = 4 + 2i + 6i + 3i^2 = 4 + 8i + 3i^2$. Weil $i^2 = -1$ gilt, haben wir
$$z = 1 + 8i.$$

(b) Wir rechnen $z = (2-i)^3 = 8 - 3 \cdot 2^2 \cdot i + 3 \cdot 2 \cdot i^2 - i^3$. Wieder ist $i^2 = -1$ und somit $i^3 = -i$, also
$$z = 8 - 12i - 6 + i = 2 - 11i.$$

(c) Wir möchten den Nenner reell machen. Wir nutzen dazu, dass wenn wir eine komplexe Zahl $w \in \mathbb{C}$ mit ihrem konjugierten $\overline{w} \in \mathbb{C}$ multiplizieren, wir die reelle Zahl $w \cdot \overline{w} = |w|^2$ erhalten. Wir erweitern den Bruch also mit $\overline{w} = \overline{2-i} = 2+i$, dem konjugierten des Nenners $w = 2 - i$:
$$z = \frac{4+3i}{2-i} = \frac{(4+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{8+10i-3}{5} = \frac{5+10i}{5} = 1 + 2i.$$

(d) Die zu berechnende Zahl ist der Kehrwert des Resultates aus Teilaufgabe (c). Wir nutzen nachher denselben Trick wie in (c), um den Nenner reell zu machen.
$$z = \left(\frac{4+3i}{2-i}\right)^{-1} = \frac{1}{1+2i} = \frac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{1-2i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i.$$

(e) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $z = a + ib$. Wir berechnen z^3:
$$z^3 = (a+ib)^3 = a^3 + 3a^2bi + 3ab^2i^2 + b^3i^3 = (a^3 - 3ab^2) + i(3a^2b - b^3).$$

Wenn $z^3 = i$ ist, muss $a^3 - 3ab^2 = 0$ und $3a^2b - b^3 = 1$ gelten. Wir unterscheiden zwei Fälle:

$\underline{a = 0}$: Aus $a = 0$ haben wir $b^3 = -1$. Weil $b \in \mathbb{R}$ ist, muss $b = -1$ sein.

$\underline{a \neq 0}$: Aus $a^3 - 3b^2a = 0$ und $a \neq 0$, folgt $a^2 = 3b^2$. Wir ersetzen $a^2 = 3b^2$ in die Gleichung $3a^2b - b^3 = 1$. Somit gilt $8b^3 = 1$. Dies bedeutet dass $b = \frac{1}{2}$. Ausserdem gilt $a^2 = 3b^2 = \frac{3}{4}$ und wir erhalten zwei Lösungen $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Die Lösungen von $z^3 = i$ sind also
$$z = -i, \qquad z = \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{i}{2}, \qquad z = -\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{i}{2}.$$

(f) Wir lösen $z^2 = -3 - 4i$. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $z = a + ib$. Wir haben
$$z^2 = (a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab.$$

Somit gilt $a^2 - b^2 = -3$ und $2ab = -4$. Weil $ab = -2$ ist, sind a und b beide nicht null. Wir ersetzen daher $a = -\frac{2}{b}$ in die erste Gleichung und erhalten $-3 = a^2 - b^2 = \frac{4}{b^2} - b^2$. Dies ist äquivalent zu

$$b^4 - 3b^2 - 4 = (b^2 - 4)(b^2 + 1).$$

Da $b^2 + 1 = 0$ keine reelle Lösung hat, muss $b^2 - 4 = 0$ sein, also $b = 2$ oder $b = -2$. Daraus folgt, dass $a = -1$ bzw $a = 1$ sein muss.

Die Lösungen von $z^2 = -3 - 4i$ sind also $z = -1 + 2i$ und $z = 1 - 2i$.