Aufgabe 1. Sei $\mathbb{R}$ ein Körper reeller Zahlen, und sei $u \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es ein eindeutiges Element $c \in \mathbb{R}$ gibt, mit $c^3 + c = u$. Was können Sie demnach über die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sagen, die durch $f(x) = x^3 + x$ gegeben ist?

Hint 1: Verwenden Sie Aufgabe 4 von Übungsserie 1 für die Eindeutigkeit.

Hint 2: Argumentieren Sie wie in Aufgabe 3c) von Übungsserie 2 für die Existenz.

Lösung. *Eindeutigkeit:* Seien $c, d \in \mathbb{R}$ Zahlen mit $c^3 + c = d^3 + d = u$. Mit Aufgabe 4 haben wir $c \leq d$ und $d \leq c$, also $c = d$.

Existenz: Seien $X_u = \{x \mid x^3 + x < u\}$ und $Y_u = \{x \mid x^3 + x > u\}$. Weil $\mathbb{R}$ ein vollständiger Körper ist, gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, so dass $x \leq c \leq y$ für alle $x \in X_u$ und $y \in Y_u$.

Behauptung: $c^3 + c = u$.
Beweis: Wir nehmen an, dass $c^3 + c > u$. Das Ziel ist es zu zeigen, dass es dann ein $y \in Y_u$ gibt mit $y < c$. Dann haben wir einen Widerspruch zur Definition von c.

Sei $\epsilon = c^3 + c - u > 0$. Für $\delta > 0$ beliebig haben wir

$$\begin{aligned}(c-\delta)^3 + (c-\delta) - u &= c^3 - \delta^3 - 3c^2\delta + 3c\delta^2 + c - \delta - u \\ &= \epsilon - \delta^3 - 3c^2\delta + 3c\delta^2 - \delta \\ &= \epsilon - \delta(\delta^2 + 3c^2 - 3c\delta + 1)\end{aligned}$$

Wir wollen nun $\delta > 0$ so wählen, dass $\delta(\delta^2 + 3c^2 - 3c\delta + 1) \leq \frac{\epsilon}{2}$. Wir schränken die Wahl von δ durch $\delta \leq 1$ ein. Dann ist

$$\delta(\delta^2 + 3c^2 - 3c\delta + 1) \leq \delta(1 + 3c^2 + 3|c| + 1).$$

Wählen wir nun δ klein genug, zum Beispiel $\delta = \frac{\epsilon/2}{1+3c^2+3|c|+1} > 0$, bekommen wir tatsächlich

$$(c-\delta)^3 + (c-\delta) - u \geq \epsilon - \frac{\epsilon}{2} > 0.$$

Mit diesem δ haben wir also $y = c - \delta \in Y_u$. Widerspruch zur Definition von c.

Ähnlich führt $c^3 + c < u$ ad absurdum. Wir schliessen, dass es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $c^3 + c = u$ ist.

Die Funktion $f(x) = x^3 + x$ ist also bijektiv.

Aufgabe 2. Finden Sie alle komplexen Zahlen c mit der Eigenschaft $c^3 + c = 0$. Was können Sie demnach über die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sagen, die durch $f(z) = z^3 + z$ gegeben ist?

Vergleichen Sie mit Aufgabe 1.

Lösung. $c = 0$ ist eine Lösung von $c^3 + c = 0$. Wenn $c \neq 0$, dann gilt $c^2 + 1 = 0$. Sei $c = a + bi$ wobei $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt $c^2 = (a + ib)(a + ib) = a^2 - b^2 + 2iab$. Weil $c^2 + 1 = 0$ ist, erhalten wir $a^2 - b^2 = -1$ und $ab = 0$. Somit gilt entweder $a = 0$ oder $b = 0$.

$b = 0$: Dann haben wir $a^2 = -1$. Dass ist aber nicht möglich, weil a reell ist.

$a = 0$: Dann haben wir $b^2 = 1$. Somit haben wir $b = 1$ oder $b = -1$.

Daraus erhalten wir drei Lösungen für die Gleichung $c^3 + c = 0$: $c = 0$, $c = i$ und $c = -i$. Die Funktion f ist also nicht injektiv, weil $f(c) = 0$ keine eindeutige Lösung hat.

Aufgabe 3. Zeichnen Sie folgende Teilmengen der komplexen Ebene.

(a) $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| \leq 3\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z^2) \geq 0\}$

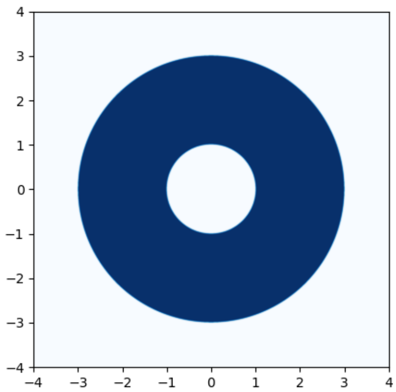
(c) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| \leq 3,\ |z| \leq 3,\ |z - i| \leq 3\}$

(d) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z + 1) = \operatorname{Re}(z + iz),\ |z| \leq 2\}$

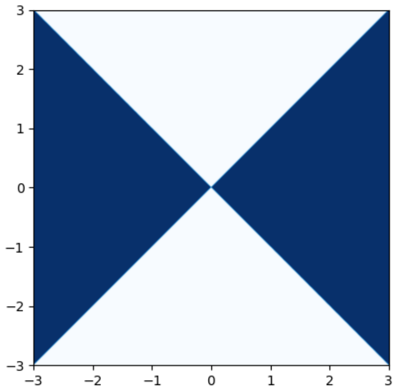
(e) $\{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 1,\ |\frac{z}{z-1}| \leq 1\}$

Lösung. Sei $z = a + ib$ wobei $a, b \in \mathbb{R}$.

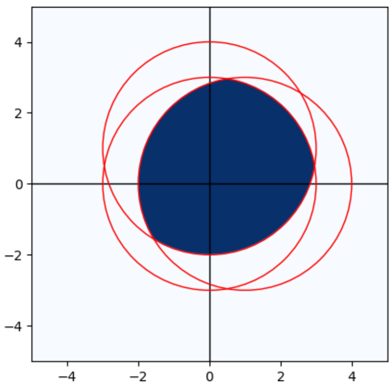
(a) $|z|^2 = a^2 + b^2$. Somit ist $1 \leq |z| \leq 3$ äquivalent zu $1 \leq a^2 + b^2 \leq 3^2$, also ein durch zwei Kreise beschränktes Gebiet, ein Kreisring.



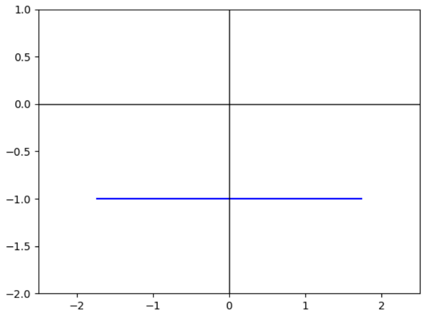
(b) $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$. Wir haben, dass $\mathrm{Re}(z^2) \geq 0$ genau dann, wenn $a^2 - b^2 \geq 0$. Also $a^2 \geq b^2$.



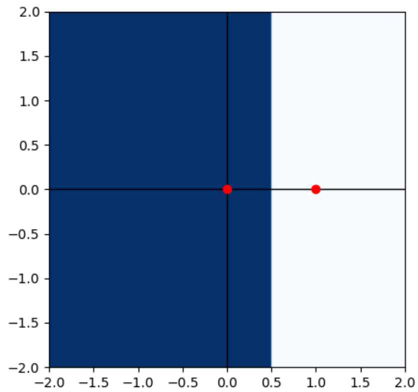
(c) $|z-1| \leq 3$, $|z| \leq 3$ und $|z-i| \leq 3$ sind drei Kreisscheiben mit Mittelpunkte $1 = (1,0)$, $0 = (0,0)$ und $i = (0,1)$. Somit ist die gesuchte Teilmenge der Schnitt dieser drei Kreisscheiben.



(d) $z + iz = a + ib + ia - b$. Somit gilt $\mathrm{Re}(z + iz) = a - b$ und $\mathrm{Re}(z + 1) = a + 1$. Wir haben $a + 1 = a - b$, das heisst $b = -1$. Da ausserdem $|z| \leq 2$ ist, folgt $a^2 + b^2 \leq 4$, also $a^2 + 1 \leq 4$, was äquivalent zu $|a| \leq \sqrt{3}$ ist.



(e) Die Gleichung $|z| \leq |z - 1|$ bedeutet, dass wir Punkte suchen, welche näher bei $0 = (0, 0)$ sind als bei $1 = (1, 0)$. Die Mittelsenkrechte $\{(\frac{1}{2}, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ zwischen diesen Punkten ist also der Rand, welcher die gesuchte Teilmenge begrenzt.



Aufgabe 4. Finden Sie das Infimum und Supremum der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$. Besitzen sie ein Minimum, ein Maximum?

1. $A = \{a - b \,|\, a, b \in \mathbb{R}, 1 < a < 2, 3 < b < 4\}$,
2. $B = \{\frac{n}{n+1} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$,
3. $C = \{\frac{n}{m} \,|\, m, n \in \mathbb{N}, m + n \leq 10\}$.

Lösung.

1. Wir sehen direkt, dass $\sup A = 2 - 3 = -1$ und $\inf A = 1 - 4 = -3$ und beide nicht in A liegen.
2. Wir bemerken zuerst, dass $\frac{n}{n+1} < \frac{m}{m+1}$ ist für $n < m \in \mathbb{N}$. Dies folgt direkt daraus, dass $n(m+1) < m(n+1)$ gilt. Darum sind sicher alle Zahlen in B grösser als die Zahl für $n = 1$, also $\frac{1}{2}$. Wir haben $\inf B = \min B = \frac{1}{2}$.

   Wir behaupten nun, dass $\sup B = 1$ ist. Aus $\frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n}$ folgt, dass $\frac{n}{n+1} < 1$ ist. Also $\sup B \leq 1$. Auf der anderen Seite ist kein $x \in \mathbb{R}$ mit $x < 1$ eine obere Schranke von B, da weil $\frac{1}{n+1}$ beliebig klein sein kann, zum Beispiel kleiner als $1 - x$. Dann ist $x < 1 - \frac{1}{n+1}$ und $1 - \frac{1}{n+1} \in B$. Beachte, dass $1 = \sup B$ nicht in B liegt. Es gibt also kein maximales Element in B.
3. Wir sehen direkt, dass $\sup C = \frac{9}{1} = 9$ und $\inf C = \frac{1}{9}$ und beide in C liegen.

Aufgabe 5. Seien $X \subseteq \mathbb{R}$ und $Y \subseteq \mathbb{R}$ nicht leere, nach oben beschränkte Teilmengen, mit der Eigenschaft $x \geq 0$ für alle $x \in X$ und $y \geq 0$ für alle $y \in Y$. Zeigen Sie, dass

$$XY := \{xy \mid x \in X, y \in Y\}$$

nach oben beschränkt ist, und dass $\sup(XY) = \sup(X)\sup(Y)$ gilt. Welche Konventionen für das Symbol ∞ brauchen Sie, falls X oder Y unbeschränkt ist?

Lösung. Wir beweisen zuerst, dass $\sup X \sup Y \leq \sup XY$: Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es $x \in X$ und $y \in Y$ so dass $\sup X \leq x + \epsilon$ und $\sup Y \leq y + \epsilon$ ist. Weil $x \geq 0$ und $y \geq 0$ sind, ist auch $\sup X \geq x \geq 0$ und $\sup Y \geq y \geq 0$. Für das Produkt gilt dann

$$\sup X \sup Y \leq (x + \epsilon)(y + \epsilon) = xy + \epsilon(x + y) + \epsilon^2.$$

Aus der Definition von XY folgt $xy \leq \sup XY$ und darum

$$\sup X \sup Y \leq \sup XY + \epsilon(\sup X + \sup Y) + \epsilon^2.$$

Da diese Ungleichung für alle $\epsilon > 0$ erfüllt ist, folgt

$$\sup X \sup Y \leq \sup XY.$$

Ähnlich beweisen wir, dass $\sup XY \leq \sup X \sup Y$: Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es $z \in XY$, so dass $\sup XY \leq z + \epsilon$. Aus der Definition von XY existiert ein $x \in X$, $y \in Y$ mit $z = xy$. Wir haben also

$$\sup XY \leq xy + \epsilon \leq \sup X \sup Y + \epsilon.$$

Da diese Ungleichung für alle $\epsilon > 0$ erfüllt ist, folgt dass

$$\sup XY \leq \sup X \sup Y.$$

Wenn X oder Y unbeschränkt ist, brauchen wir $\infty \cdot 0 = 0$ und $\infty \cdot a = \infty$ für alle $a > 0$ oder $a = \infty$.

Aufgabe 6. Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge mit folgender Eigenschaft: Für alle $x, y \in X$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt $x \leq c \leq y \implies c \in X$. Zeigen Sie, dass X ein Intervall ist.

Folgern Sie daraus, dass ein beliebiger nichtleerer Durchschnitt von Intervallen wiederum ein Intervall ist.

Lösung. Da X nicht leer ist, können wir $x_0 = \inf X$ und $y_0 = \sup X$ definieren.

Falls x_0 *und* y_0 beide Elemente in X sind, dann folgt per Annahme, dass jedes $c \in [x_0, y_0]$ auch in X ist. Also $[x_0, y_0] \subseteq X$.

Umgekehrt kann per Definition des Infimums und des Supremums kein Element in X strikt kleiner als x_0 und keines strikt grösser als y_0 sein. Es folgt $X \subseteq [x_0, y_0]$ und somit $X = [x_0, y_0]$.

Falls $x_0 \notin X$, $y_0 \in X$ und $x_0 \neq -\infty$ sind, betrachte ein beliebiges $c \in (x_0, y_0]$. Wir verwenden die Formulierung des Infimums welche der Formulierung (2.5) aus dem Skript für das Supremum entspricht:

$$x \geq x_0 \qquad \forall x \in X \qquad \text{und} \qquad c > x_0 \implies \exists x \in X : x < c.$$

In Worten: x_0 ist eine untere Schranke von X und wenn c strikt grösser ist als x_0, so ist es keine untere Schranke mehr (denn $x_0 = \inf(X)$ ist ja per Definition die grösste untere Schranke), d.h. es gibt ein $x \in X$ welches kleiner ist als c.

Zurück zur Aufgabe: Weil also $x_0 < c$ ist, muss es ein $x \in X$ geben, so dass $x < c$. Insbesondere ist also $x \leq c \leq y_0$. Aus der Annahme folgt, dass $c \in X$, also $(x_0, y_0] \subseteq X$. Wie im Argument vorher gilt auch $X \subseteq (x_0, y_0]$.

Falls $x_0 \notin X$, $y_0 \in X$ und $x_0 = -\infty$, betrachte ein beliebiges $c \in (-\infty, y_0]$. Da $-\infty$ das Infimum von X ist, gibt es ein $x \in X$ mit $x < c$. Aus der Annahme folgt mit $c \in [x, y_0]$, dass $c \in X$ sein muss. Also $(-\infty, y_0] \subseteq X$ und mit $X \subseteq (-\infty, y_0]$ wie oben folgt $X = (-\infty, y_0]$.

Die anderen Fälle $[x_0, y_0), (x_0, y_0), (-\infty, y_0), [x_0, \infty), (x_0, \infty)$ und $(-\infty, \infty)$ folgen aus Kombination der obigen Argumente.

Ein beliebiger Schnitt von Intervallen ist ein Intervall: Sei $\mathcal{I}$ eine Familie von Intervallen. Wir wollen zeigen, dass

$$J = \bigcap_{I \in \mathcal{I}} I$$

ein Intervall ist. Aus dem oben hergeleiteten ist es genug zu zeigen, dass wenn $x, y \in J$, $c \in \mathbb{R}$ mit $x \leq c \leq y$, dann ist $c \in J$.

Falls $x, y \in J$ ist, dann ist $x, y \in I$ für alle Intervalle $I \in \mathcal{I}$. Aus $x \leq c \leq y$ folgt nun $c \in I$ für alle $I \in \mathcal{I}$ und darum $c \in \bigcap_{I \in \mathcal{I}} I = J$. Der Schnitt J ist also ein Intervall.

Aufgabe 7. Sei $X \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge, die offen und abgeschlossen ist. Zeigen sie, dass $X = \emptyset$ oder $X = \mathbb{R}$ gilt.

Hint: Nehmen Sie an, X sei nicht leer, wählen Sie $x \in X$, und studieren Sie die Menge der reellen Zahlen $r > 0$ mit der Eigenschaft $(x - r, x + r) \subseteq X$.

Lösung. Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ offen und abgeschlossen. Nehmen wir an, dass X nicht leer ist. Es gibt also ein $x_0 \in X$.

Falls X nicht ganz $\mathbb{R}$ ist, dann muss es ein $z \notin X$ geben, sodass entweder $x_0 < z$ oder $x_0 > z$. Nehmen wir ersteres an (zweiteres kann analog genutzt werden). Die Menge

$A = \{y \in \mathbb{R} \mid x_0 < y \text{ und } y \notin X\}$ ist daher nicht leer. Sei $y_0 = \inf A$. Wir wollen zeigen, dass $y_0 \in X$ und $y_0 \notin X$ beide zum Widerspruch führen.

Falls $y_0 \in X$ wäre, dann gibt es wegen der Offenheit von X ein Intervall $(y_0 - r, y_0 + r) \subseteq X$ mit $r > 0$. Da aber y_0 das Infimum von A ist, gibt es ein $y \notin X$ mit $y - y_0 < r$. Widerspruch.

Falls $y_0 \notin X$ wäre, dann ist wegen der Abgeschlossenheit von X das Komplement $\mathbb{R} \setminus X$ offen und es gibt daher ein Intervall $(y_0 - r, y_0 + r) \subseteq \mathbb{R} \setminus X$ für ein $r > 0$. Dann ist aber $y' = y_0 - \frac{r}{2}$ nicht in X und darum in A, aber gleichzeitig kleiner als y_0, was der Definition des Infimums von A widerspricht.

Daraus folgt, dass entweder $X = \emptyset$ oder $X = \mathbb{R}$ sein muss.