Aufgabe 1. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte in den reellen Zahlen, falls sie existieren:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n^4+15}{3n^4+n^3+n-1}, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5}{n^3+n+1}, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^5-10}{n^2+1}$$

Verwenden Sie hier und auch sonst kein früher erlerntes Kochrezept, das Sie nicht begründen können.

Lösung. Die Lösungen sind: $\frac{7}{3}$, 0 und ∞. Die Beweise sind Spezialfälle von Aufgabe 1.

Aufgabe 2. Formulieren und beweisen Sie einen allgemeinen Satz über Grenzwerte von Folgen wie in Aufgabe 1.

Lösung. *Wir beweisen zuerst folgende Behauptung:* Für beliebige $c_j \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{N}\frac{c_j}{n^j}=0.$$

Beweis: Sei $1>\epsilon>0$. Dann gilt für alle $n\in\mathbb{N}$ mit $n\geq\frac{1}{\epsilon}$ (also $\epsilon\geq\frac{1}{n}$ und darum auch $\epsilon\geq\epsilon^j\geq\frac{1}{n^j}$), dass

$$\left|\sum_{j=1}^{N}\frac{c_j}{n^j}\right|\leq\sum_{j=1}^{N}\frac{|c_j|}{n^j}\leq\epsilon\sum_{j=1}^{N}|c_j|.$$

Da $\sum_{j=1}^{N}|c_j|\in\mathbb{R}$ eine fixe Zahl ist, können wir durch kleine Wahl von ϵ den Term $\left|\sum_{j=1}^{N}\frac{c_j}{n^j}\right|$ beliebig klein machen. Darum ist der Limit 0.

Wir beweisen nun folgenden Satz: Seien $P(X),Q(X)\in\mathbb{R}[X]$ zwei Polynome gegeben durch $P(X)=\sum\limits_{k=0}^{N}a_kX^k$ bzw. $Q(X)=\sum\limits_{k=0}^{M}b_kX^k\neq 0$ wobei $a_N,b_M\neq 0$. Dann gilt:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{P(n)}{Q(n)}=\dfrac{a_N}{b_N}$, wenn $N=M$ ist.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{P(n)}{Q(n)}=\operatorname{sgn}\left(\frac{a_N}{b_M}\right)\infty$, wenn $N>M$ ist.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{P(n)}{Q(n)}=0$, wenn $N<M$ ist.

Beweis:

(1) Wir schreiben für alle $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$:

$$\begin{aligned}\left|\frac{P(n)}{Q(n)} - \frac{a_N}{b_N}\right| &= \left|\frac{a_N}{b_N}\right| \left|\frac{1 + \sum\limits_{k=0}^{N-1} a_k n^{-N+k}}{1 + \sum\limits_{k=0}^{N-1} b_k n^{-N+k}} - 1\right| = \left|\frac{a_N}{b_N}\right| \left|\frac{\sum\limits_{k=0}^{N-1} (a_k - b_k) n^{-N+k}}{1 + \sum\limits_{k=0}^{N-1} b_k n^{-N+k}}\right| \\ &= \left|\frac{a_N}{b_N}\right| \left|\frac{\sum\limits_{j=1}^{N} \frac{a_{N-j} - b_{N-j}}{n^j}}{1 + \sum\limits_{j=1}^{N} b_{N-j} n^j}\right|,\end{aligned}$$

wobei wir den Index von k zu $j = N - k$ gewechselt haben. Nun ist aber die Summe im Zähler und die Summe im Nenner von der Form wie in der Behauptung. Die Summen können darum beliebig klein gemacht werden. Wir finden daher zu jedem $\frac{1}{2} > \epsilon > 0$ ein n_0, sodass für alle $n \geq n_0$ folgende Abschätzung gilt:

$$\left|\frac{P(n)}{Q(n)} - \frac{a_N}{b_N}\right| \leq \frac{\epsilon}{1-\epsilon},$$

da im Allgemeinen für $|x| < 1$ gilt, dass $\frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1-|x|}$. Da ausserdem $\frac{1}{2} > \epsilon$ ist, haben wir

$$\left|\frac{P(n)}{Q(n)} - \frac{a_N}{b_N}\right| \leq \frac{\epsilon}{1-\epsilon} \leq \frac{\epsilon}{1-\frac{1}{2}} = 2\epsilon.$$

Dass bedeutet, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_N}{b_N}$$

gilt.

(2) Wir sollen zeigen, dass für alle $L > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq n_0$:

$$\left|\frac{P(n)}{Q(n)}\right| > L$$

gilt. Aus Teil (1) kriegen wir zumindest schon

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{P(n)}{n^{N-M} Q(n)}\right) = \frac{a_N}{b_M}.$$

Das heisst es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt, dass

$$\left|\frac{P(n)}{n^{N-M}Q(n)} - \frac{a_N}{b_M}\right| \leq \left|\frac{a_N}{b_M}\right|/2.$$

Dann ist aber mit Hilfe der umgekehrten Dreiecksungleichung:

$$\left|\frac{P(n)}{n^{N-M}Q(n)}\right| \geq \left|\frac{a_N}{b_M}\right|/2.$$

Also

$$\left|\frac{P(n)}{Q(n)}\right| \geq \left|n^{N-M}\right| \left|\frac{a_N}{b_M}\right|/2.$$

Da $\left|\frac{a_N}{b_M}\right|/2$ fixiert bleibt und n beliebig wächst, ist der Grenzwert im Betrag ∞. Durch den Beweis findet man auch das Vorzeichen $\operatorname{sgn}\left(\frac{a_N}{b_M}\right)$ des Grenzwertes.

(3) Durch (2) findet man, dass $\left|\frac{Q(n)}{P(n)}\right|$ Grenzwert ∞ hat und darum hat der reziproke Ausdruck $\left|\frac{P(n)}{Q(n)}\right|$ Grenzwert 0.

Aufgabe 3. Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, und sei $F \subseteq \mathbb{R}$ die Menge der Häufungspunkte der Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$. Zeigen Sie, dass F abgeschlossen ist.

Lösung. Wir zeigen, dass das Komplement $F^c = \mathbb{R} \setminus F$ offen ist. Falls F^c nicht offen wäre, gäbe es ein $x \in F^c$, sodass jeder Intervall $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ ein Element aus F enthält. Sei $\epsilon > 0$, dann gibt es ein $a \in F$ mit $|x-a| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Weil $a \in F$ ein Häufungspunkt ist, gibt es für alle $N \in \mathbb{N}$ ein $n \geq N$, so dass $|a - x_n| \leq \frac{\epsilon}{2}$.

Mit der Dreiecksungleichung ist $|x - x_n| \leq |x-a| + |a - x_n| < \epsilon$, folglich ist x ein Häufungspunkt, also in F. Widerspruch! Damit ist $\mathbb{R} \setminus F$ offen und F folglich abgeschlossen.

Aufgabe 4. Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ die durch $x_0 = 1$ und

$$x_n = \frac{2}{3}\left(x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}\right)$$

für $n \geq 1$ rekursiv definierte Folge. Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Lösung. Sei $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ die Funktion

$$f(x) = \frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Der Grenzwert: Falls die Folge einen Grenzwert A hat, dann ist er ein Fixpunkt der Rekursionsfunktion f. (Aus $x_n = f(x_{n-1})$ und dem Grenzwert für n gegen unendlich bekommen wir $A = f(A)$, da f stetig ist.) Aus der Gleichung

$$A = f(A) = \frac{2}{3}\left(A + \frac{1}{A}\right).$$

folgt $A^2 = 2$, also $A = \pm\sqrt{2}$. Da $x_0 = 1$ ist, sieht man, dass alle Folgenglieder x_n positiv sind. Also muss $A = +\sqrt{2}$ sein.

Der Grenzwert existiert: Wir wollen zeigen, dass die Folge x_n monoton wachsend und beschränkt ist, so dass wir den Satz 2.108 anwenden können. Wie beweisen zwei Eigenschaften der Rekursionsfunktion:

1. $f(x) \geq x$ genau dann wenn $x \leq \sqrt{2}$
2. f ist monoton wachsend auf $x \in [1, \infty)$

Die Eigenschaft (1) erhalten wir analog zur Lösung der Fixpunktgleichung $A = f(A)$. Für die Eigenschaft (2) seien $1 \leq x \leq y$. Wir wollen also

$$y + \frac{1}{y} - \left(x + \frac{1}{x}\right) = f(y) - f(x) \geq 0.$$

Dies erhalten wir, da die Gleichung mit xy multipliziert

$$xy^2 + x - x^2y - y = (y - x)(xy - 1)$$

ergibt, welches in der Tat ≥ 0 ist, da $x, y \geq 1$ und $y \geq x$ ist.

Da $f\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$ ist, f monoton wachsend ist und $f(x) \geq x$, folgt $1 \leq f(x) \leq \sqrt{2}$ für alle $1 \leq x \leq \sqrt{2}$.

Das heisst, die die Folge gegeben durch $x_0 = 1$ und $x_n = f(x_{n-1})$ ist von oben beschränkt und wegen Eigenschaft (1) wachsend. Darum konvergiert die Folge nach Satz 2.108.

Aufgabe 5. Seien $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergente Folgen reeller Zahlen, mit Grenzwerten A, B und C respektive. Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ die Folge definiert durch

$$x_n = \begin{cases} a_n & \text{falls } n = 3k, k \in \mathbb{N} \\ b_n & \text{falls } n = 3k+1, k \in \mathbb{N} \\ c_n & \text{falls } n = 3k+2, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Berechnen Sie $\limsup_{n\to\infty} x_n$, $\liminf_{n\to\infty} x_n$ und die Menge der Häufungspunkte der Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$.

Lösung. *Die Häufungspunkte von $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ sind A, B, C:*

Die Teilfolge $(x_{3_n})_{n=0}^{\infty}$ ist genau die Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, also ist A ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n=0}^{\infty}$. Analog sind B und C Häufungspunkte. Wir zeigen nun, dass es keine weiteren gibt. Sei $D \neq A, B, C$ ein Punkt in $\mathbb{R}$. Dann ist $\min\{|D-A|, |D-B|, |D-C|\} = \epsilon > 0$. Da aber a_n, b_n, c_n schliesslich in einem $\epsilon/2$ Intervall um A, B beziehungsweise C liegen, sind nur endlich viele x_n ausserhalb dieser Bälle. Also gibt es nicht unendlich viele Folgenglieder, die in einem $\epsilon/2$ Intervall um D liegen. Daher kann D kein Häufungspunkt sein.

Der limsup und der liminf: Da der limsup und der liminf Häufungspunkte sind und wir nur die drei Häufungspunkte A, B, C haben ist

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \max\{A, B, C\} \qquad \text{und} \qquad \liminf_{n\to\infty} x_n = \min\{A, B, C\}.$$

Aufgabe 6. Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen, so dass $(x_{n+1} - x_n)_{n=0}^{\infty}$ gegen 0 konvergiert. Setze

$$A = \liminf_{n\to\infty} x_n \qquad \text{und} \qquad B = \limsup_{n\to\infty} x_n$$

Zeigen Sie, dass die Menge der Häufungspunkte der Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ das Intervall $[A, B]$ ist. Konstruieren Sie ein Beispiel solch einer Folge $[A, B] = [0, 1]$.

Lösung. Die Idee besteht darin, dass der limes inferior A einer beschränkten Folge der kleinste Häufungspunkt ist und der limes superior B der grösste Häufungspunkt. Es gibt also immer wieder Glieder x_n, die nahe bei A und Glieder $x_{n'}$, die nahe bei B sind. Da der Abstand der Glieder per Annahme sehr klein wird, wandern die die Folge zwischen A und B hin und her mit kleinem Abstand der Folgenglieder. Alle Punkte zwischen A und B werden also approximiert, sind Häufungspunkte.

Nun der genaue Beweis: Sei $C \in [A, B]$. Wir zeigen, dass C ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ ist. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Wir wollen für jedes $N \in \mathbb{N}$ ein $M \geq N$ mit $|C - x_M| \leq \epsilon$ finden. Sei also N beliebig. Per Annahme gibt es ein N_1, so dass $|x_n - x_{n+1}| \leq \epsilon$ für alle $n \geq N_1$. Wir können N_1 wählen, so dass $N_1 > N$ ist. Da der limes inferior und der limes superior Häufungspunkte sind, gibt es ganze Zahlen $N_2, N_3 > N_1$ (und darum auch $> N$), so dass

$$|x_{N_2} - A| \leq \epsilon \qquad \text{und} \qquad |x_{N_3} - B| \leq \epsilon.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $N_2 \leq N_3$. Per Konstruktion haben die Elemente in $S = \{x_{N_2}, \dots, x_{N_3}\}$ Abstand $|x_n - x_{n+1}| \leq \epsilon$. Weil Ausserdem x_{N_2} nahe bei A ist und x_{N_3} nahe bei B ist, gibt es für jede Zahl C in $[A, B]$ ein $x_M \in S$, so dass $|C - x_M| \leq \epsilon$ ist.

Ein Beispiel: Betrachte die Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ definiert durch

$$x_n = \begin{cases} \frac{2^k-(n-2^k)}{2^k}, & k \text{ ungerade} \\ \frac{n-2^k}{2^k}, & k \text{ gerade} \end{cases}$$

wobei $k \in \mathbb{N}$ die grösste Zahl ist, sodass $n - 2^k \geq 0$ ist. Die ersten Glieder sind

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{2}, x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = 0, x_5 = \frac{1}{4}, x_6 = \frac{2}{4}, x_7 = \frac{3}{4}, x_8 = \frac{8}{8}, x_9 = \frac{7}{8}, x_{10} = \frac{6}{8} \dots$$

Die Folge geht also hin und her über das Intervall $[0, 1]$ mit immer kleiner werdendem Abstand zwischen den Gliedern. Die beiden extremen Häufungspunkte sind

$$A = \limsup_{n\to\infty} x_n = 0 \qquad \text{und} \qquad B = \liminf_{n\to\infty} x_n = 1,$$

da $x_{2^k} = 0$ für alle geraden k und $x_{2^k} = 1$ für alle ungeraden k ist. Ausserdem ist $x_n - x_{n+1} \leq \frac{1}{2^k}$ falls $n \geq 2^k$. Also ist x_n eine Folge, die die gewünschten Eigenschaften erfüllt.

Aufgabe 7. Zeigen Sie, dass sich der Limes superior nicht mit Addition kommutiert. Genauer, seien $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ beschränkte Folgen. Zeigen Sie, dass zwar

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n,$$

aber Gleichheit nicht immer gelten muss.

Lösung. *Die Ungleichung:* Die Ungleichung folgt durch genaues Wiederholen, wie der limes superior definiert wird:
Sei $N \in \mathbb{N}$. Dann haben wir

$$x_n + y_n \leq \sup\{x_k \mid k \geq N\} + \sup\{y_k \mid k \geq N\},$$

für alle $n \geq N$. Darum ist auch für jedes $N \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\sup\{x_n + y_n \mid n \geq N\} \leq \sup\{x_k \mid k \geq N\} + \sup\{y_k \mid k \geq N\}$$

gültig. Doch wir haben auf der rechten Seite sowie auf der linken Seite konvergierende Folgen (Summe von konvergenten Folgen ist konvergent und Grenzwert kommutiert mit Summe, also Prop 2.96 im Skript), wobei die linke Seite von der rechten dominiert wird. Also gilt auch für die Grenzwerte:

$$\lim_{N\to\infty}(\sup\{x_n + y_n \mid n \geq N\}) \leq \lim_{N\to\infty}(\sup\{x_k \mid k \geq N\}) + \lim_{N\to\infty}(\sup\{y_k \mid k \geq N\})$$

Und mit der Notation von limsup:

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n$$

Ein Beispiel für Ungleichheit: Betrachte die Folgen

$$x_n = (-1)^n \qquad \text{und} \qquad y_n = (-1)^{n+1}.$$

Der limsup der beiden Folgen (x_n) und (y_n) ist bei beiden gleich 1. Es gilt aber $x_n + y_n = 0$ für alle n, darum ist der limsup von $(x_n + y_n)$ gleich 0.

Aufgabe 8. Sei $(z_n)_{n=0}^\infty$ eine konvergente Folge in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $(|z_n|)_{n=0}^\infty$ konvergiert und geben Sie den Grenzwert an. Impliziert umgekehrt die Konvergenz von $(|z_n|)_{n=0}^\infty$ die Konvergenz von $(z_n)_{n=0}^\infty$?

Lösung. Sei $\epsilon > 0$. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ und einen Grenzwert $z \in \mathbb{C}$, so dass $|z_n - z| < \epsilon$ für alle $n \geq N$. (Dies folgt direkt aus der Konvergenz des Real und des Imaginärteils folgt. Schreibe einen kurzen Beweis falls Du nicht überzeugt bist.) Durch die umgekehrte Dreiecksungleichung erhalten wir

$$||z_n| - |z|| \leq |z_n - z| < \epsilon$$

für alle $n \geq N$. Somit folgt, dass die Folge $(|z_n|)_{n=0}^\infty$ konvergiert, mit Grenzwert $|z|$.

Die Umkehrung gilt nicht: Sei $z_n = (-1)^n$. Es gilt $|z_n| = 1$. Somit konvergiert $(|z_n|)_{n=0}^\infty$ gegen 1. Die Folge z_n konvergiert aber nicht.