Aufgabe 1.

a) (Lese-Aufgabe) Lesen Sie den Text am Ende dieser Übungsserie. Insbesondere sollten Sie wissen wie die Fakultät und die Binomialkoeffizienten definiert sind und den binomischen Lehrsatz kennen sowie den Beweis verstanden haben.

Für eine detailliertere Ausführung dieser Themen empfehlen wir die Abschnitte 3.3.1, 3.3.2 und 3.3.3 im Skript von Prof. Manfred Einsiedler.

b) Für jede reelle Zahl $a > 0$ definieren wir die Folge der reellen Zahlen $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ durch $x_n = \sqrt[n]{a}$. Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert, und dass

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

c) Wir definieren eine Folge von reellen Zahlen $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ durch $x_n = \sqrt[n]{n}$. Zeigen Sie, dass diese Folge konvergiert, mit Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Lösung.

b) *Angenommen,* $a \geq 1$*.* Wir definieren $b_n = x_n - 1 \geq 0$ für $n \in \mathbb{N}$ und wollen zeigen, dass die Folge $(b_n)_n$ gegen Null konvergiert. Nach dem Binomischen Lehrsatz gilt

$$a = (1 + b_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_n^k \geq n b_n.$$

In der letzten Ungleichung haben wir nur den Term mit $k = 1$ aus der Summe behalten und alle anderen (positiven) Terme der Summe weggelassen.

Daher gilt $0 \leq b_n \leq \frac{a}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ durch das Sandwich-Lemma und somit $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n + 1 = 1$ durch die Linearität des Limes.

Der Fall $a \in (0, 1]$ kann durch Teil (3) des Satzes 2.96 auf den obigen reduziert werden.

c) Wir argumentieren dafür ähnlich wie in Teil b). Definieren Sie $b_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$ so, dass.

$$n = (1 + b_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_n^k \geq \binom{n}{2} b_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} b_n^2$$

gilt für alle $n \geq 2$. Wir dividieren durch $\frac{n(n-1)}{2}$ und wir erhalten

$$0 \leq b_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

für alle $n \geq 2$. Da die Wurzelfunktion stetig ist, konvergiert die Folge

$$\left(\sqrt{\tfrac{2}{n-1}}\right)_{n=2}^{\infty}$$

zum Grenzwert 0. Wenn wir nun das Sandwich-Lemma anwenden, erhalten wir $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ und unsere Behauptung folgt wie in Teil b).

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die "reziproke" Funktion $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert durch $h(x) = \frac{1}{x}$ stetig ist.

Schliessen Sie daraus, dass Funktionen $q : D \to \mathbb{R}$ der Art

$$x \mapsto q(x) = \tfrac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}$$

stetig sind, wenn $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetige Funktionen sind.

Lösung. *Die reziproke Abbildung h ist stetig:* Betrachten wir dazu einen beliebigen Punkt $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und ein $\epsilon > 0$. Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir suchen ein $\delta \in \mathbb{R}$ so dass $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \epsilon$ falls $|x - x_0| < \delta$.

Wir bemerken zuerst, dass δ strikt kleiner als $|x_0|$ sein muss. Sei per Widerspruch $\delta \geq |x_0|$. Dann könnte x beliebig nahe an 0 sein und somit $\frac{1}{x}$ beliebig gross. Da aber $\frac{1}{x_0}$ eine endliche Zahl ist, können wir somit nicht $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \epsilon$ haben.

Sei also $|x - x_0| < \delta$ und zusätzlich $\delta < |x_0|$. Dann haben wir (bemerke dass $|x| > |x_0| - \delta$)

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \left|\frac{x_0 - x}{x x_0}\right| < \frac{\delta}{|x||x_0|} < \frac{\delta}{(|x_0| - \delta)|x_0|}.$$

Wir betrachten erst, was wir bei Gleichheit finden und lösen

$$\epsilon = \frac{\delta'}{(|x_0| - \delta')|x_0|}$$

nach δ' auf. Entsprechend wählen wir

$$\delta' = \frac{\epsilon |x_0|^2}{1 + \epsilon |x_0|}.$$

Sei also $\delta = \min\left\{|x_0|, \frac{\epsilon|x_0|^2}{1+\epsilon|x_0|}\right\} > 0$ und x so dass $|x - x_0| < \delta$. Dann haben wir wegen der Wahl von δ

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \epsilon.$$

Wir schliessen dass $h(x) = \frac{1}{x}$ stetig ist.

Funktionen der Form f/g sind stetig, falls g nie Null ist: Weil $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $g : D \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig sind, ist auch die Verküpfung $h \circ g = \frac{1}{g} : D \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig. Weil $f : D \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig ist, ist auch die Multiplikation $f \cdot \frac{1}{g} = \frac{f}{g} : D \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

nicht stetig ist.

Bemerkung: Wir werden die Funktion sin noch in der Vorlesung einführen. Für diese Aufgabe, Stetigkeit von $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und die üblichen Eigenschaften, die ihr vom Gymnasium kennt, dürfen vorausgesetzt werden.

Lösung. *Die Funktion f ist nicht stetig bei $x_0 = 0$:* Wir zeigen, dass wir beliebig nahe bei $x_0 = 0$ ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1$ finden können. Betrachte $x = \frac{2}{\pi(1+4N)}$ für positives $N \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi(1+4N)}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2N\pi\right) = 1.$$

Betrachten wir $\epsilon = \frac{1}{2}$ und sei δ beliebig. Wähle N gross genug, so dass $|x| \leq \delta$. Weil $|x - x_0| \leq \delta$, aber $|f(x) - f(x_0)| = 1 \geq \frac{1}{2} = \epsilon$. ist, haben wir gezeigt, dass f nicht stetig bei $x_0 = 0$ ist.

Aufgabe 4. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in [0,1]$ existiert, so dass $f(x_0) = x_0$ gilt.

(b) Sei $g : [0,2] \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, so dass $g(0) = g(2)$ gilt. Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in [0,1]$ existiert, welches $g(x_0) = g(x_0 + 1)$ erfüllt.

Lösung.

(a) Definiere $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $h(x) = f(x) - x$. Weil f und x stetige Funktionen sind und Subtraktion stetig ist, ist auch h stetig. Ausserdem gilt $h(0) = f(0) \geq 0$ und $h(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Da 0 zwischen $h(0)$ und $h(1)$ liegt, besagt der Zwischenwertsatz, dass es ein $x_0 \in [0,1]$ gibt mit $h(x_0) = 0$. Somit also $f(x_0) = x_0$.[1]

(b) Wir setzen $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x) = g(x+1) - g(x)$. Weil g und Addition von 1 stetig sind, ist auch h stetig. Ausserdem gilt $h(0) = g(1) - g(0)$ und $h(1) = g(2) - g(1) = g(0) - g(1) = -h(0)$. Somit liegt 0 zwischen $h(0)$ und $h(1)$ Aus dem Zwischenwertsatz gibt es ein $x_0 \in [0,1]$ mit $h(x_0) = 0$. Somit also $g(x_0) = g(x_0 + 1)$.

Aufgabe 5. Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige, injektive Abbildung. Zeigen Sie, dass f streng monoton ist.

Lösung. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige, injektive Abbildung. Falls f nicht streng monoton ist, finden wir $x < y < z$ im Intervall I, so dass $f(x) \geq f(y) \leq f(z)$ oder $f(x) \leq f(y) \geq f(z)$.

Nehmen wir ersteres an. Wenn wir noch das Bild von x und z vergleichen, haben wir entweder $f(x) \geq f(z) \geq f(y)$ oder $f(z) \geq f(x) \geq f(y)$. Wir nehmen wieder ersteres, also $f(x) \geq f(z) \geq f(y)$, an. Die anderen Fälle sind analog.

Da f stetig ist, erhalten wir aus dem Zwischenwertsatz für $x < y$ und dem Wert $f(z)$ ein $x \leq w \leq y$, so dass $f(w) = f(z)$. Aus Injektivität folgt $w = z$. Dies kann aber nicht sein, da $w \leq y < z$.

Daraus schliessen wir, dass f streng monoton ist.

Aufgabe 6. Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine monotone Abbildung, so dass für alle $a, b \in I$ und $\xi \in \mathbb{R}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ein $x \in \mathbb{R}$ zwischen a und b existiert, welches $f(x) = \xi$ erfüllt. Zeigen Sie, dass f stetig ist.

Vergleichen Sie dieses Resultat mit dem Zwischenwertsatz.

Lösung. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass f monoton wachsend ist.

[1] Dies ist die einfachste Version des Brouwer'schen Fixpunktsatzes, welcher besagt, dass es für eine stetige Funktion $f : [0,1]^n \to [0,1]^n$ einen Punkt $x_0 \in [0,1]^n$ geben muss, so dass $f(x_0) = x_0$ ist. Eine *angewandte* Formulierung für $n = 3$ davon ist, dass wenn man sich eine Kaffeetasse als $[0,1]^3$ vorstellt, mindestens ein Punkt x_0 des Kaffees nach dem Rühren (das ist die stetige Abbildung f) wieder am selben Punkt ist, wie vor dem Rühren.

Wir zeigen Stetigkeit in einem beliebigen $x_0 \in I$. Sei dazu $\epsilon > 0$. Dazu wollen wir zuerst ein $\delta_1 > 0$ finden, so dass für $x \in I$ mit $x_0 \leq x \leq x_0 + \delta_1$ der Wert $f(x)$ nicht viel grösser als $f(x_0)$ ist, also konkret $f(x) \leq f(x_0) + \epsilon$.

Falls $f(x) \leq f(x_0) + \epsilon$ für alle $x \in I$, dann können wir $\delta_1 > 0$ beliebig wählen, zum Beispiel $\delta_1 = 1$. Andernfalls gibt es ein $x_1 \in I$, so dass $f(x_1) > f(x_0) + \epsilon$. Die Voraussetzung auf $f(x_0) < f(x_0) + \epsilon < f(x_1)$ angewendet, ergibt die Existenz eines $y_1 \in I$ mit $f(y_1) = f(x_0) + \epsilon$. Da f monoton wachsend ist, muss $x_0 < y_1 < x_1$ sein und darum $\delta_1 = y_1 - x_0$ positiv. Wieder weil f monoton wachsend ist, haben wir für alle $x \in I$ zwischen x_0 und $y_1 = x_0 + \delta_1$, dass $f(x_0) \leq f(x) \leq f(y_1) = f(x_0) + \epsilon$.

In dem wir $f(x) \geq f(x_0) - \epsilon$ betrachten, erhalten wir analog ein $\delta_2 > 0$, so dass für alle $x \in I$ zwischen $x_0 - \delta_2$ und x_0, dass $f(x_0) - \epsilon \leq f(x) \leq f(x_0)$ ist.

Setzen wir nun $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ erhalten wir, dass für alle $x \in I$ zwischen $x_0 - \delta$ und $x_0 + \delta$ gilt, dass $f(x_0) - \epsilon \leq f(x) \leq f(x_0) + \epsilon$ ist.

Daraus schliessen wir, dass f stetig ist.

Aufgabe 7. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn für jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ auch $f^{-1}(U)$ offen ist.

Lösung. Wir können unsere Definition von Stetigkeit auch mithilfe von Intervallen schreiben: *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist stetig bei x_0, falls es für jedes Intervall $(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ (also ϵ beliebig) ein Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gibt, so dass*

$$f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \subseteq (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon).$$

Wir fahren nun mit dem Beweis der Aufgabe fort.

$\Rightarrow$: *Wir nehmen an, dass f stetig ist.* Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ eine offene Menge. Wir beweisen, dass $f^{-1}(U)$ auch offen ist. Sei $x_0 \in f^{-1}(U)$, also $f(x_0) \in U$. Wir bemerken:

1. Weil U offen ist, gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon) \subseteq U$.
2. Wegen der Stetigkeit von f finden wir ein $\delta > 0$, so dass
$$f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \subseteq (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon).$$

Da $(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon) \subseteq U$ und $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \subseteq U$ folgt, dass $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ein offenes Intervall in $f^{-1}(U)$ um x_0 ist. Daraus schliessen wir, dass $f^{-1}(U)$ offen ist.

$\Leftarrow$: *Wir nehmen an, dass $f^{-1}(U)$ für beliebige offene Mengen $U \subseteq \mathbb{R}$ offen ist.* Seien $x_0 \in I$ und $\epsilon > 0$.

1. Da $(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon) \subset \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge ist, ist per Annahme auch $f^{-1}((f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)) \subset \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge.
2. Ausserdem ist $x_0 \in f^{-1}((f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon))$. Darum gibt es ein Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ mit $\delta > 0$, so dass $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq f^{-1}((f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon))$.

Aber dann ist $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \subseteq (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$, also f stetig.

Aufgabe 8. Welche der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind gleichmässig stetig? Überzeugen Sie sich zuerst davon, dass die jeweils gegebene Funktion stetig ist, und skizzieren Sie den Graphen.

a) $f(x) = \sqrt{|x|}$,

b) $f(x) = x^2$,

c) $f(x) = \min(\sqrt{|x|}, x^2)$,

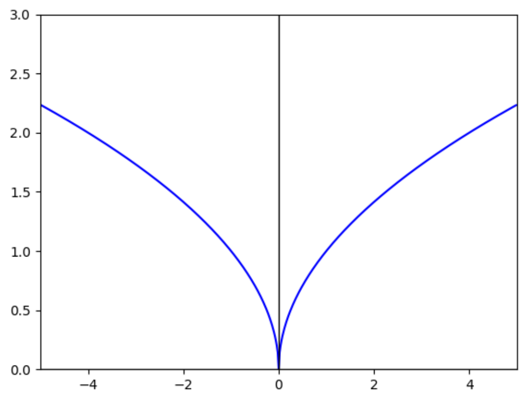
d) $f(x) = \inf_{k \in \mathbb{Z}} |x - k|$,

e) $f(x) = \inf_{k \in \mathbb{Z}} |x - k^2|$

f) $f(x) = x \cdot \inf_{k \in \mathbb{Z}} |x - k|$

Lösung.

1. $\sqrt{|x|}$ *ist gleichmässig stetig:*



Sei $\epsilon > 0$ und $\delta = \epsilon^2 > 0$. Für alle x, y mit $|x - y| < \delta$ haben wir

$$\left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right|^2 = \left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right| \cdot \left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right|.$$

Durch die umgekehrte Dreieckungleichung gilt

$$\left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right| \leq \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}.$$

Somit haben wir

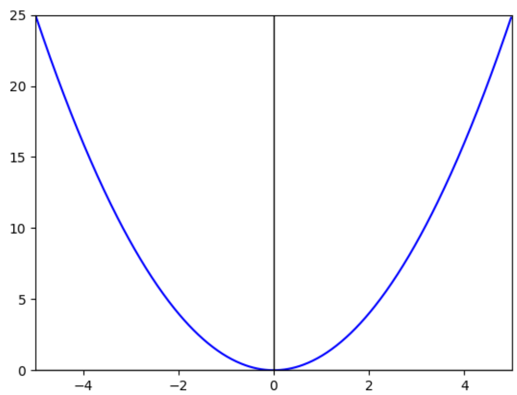
$$\left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right|^2 \leq \left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right| \cdot \left|\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}\right| = \left|\sqrt{|x|}^2 - \sqrt{|y|}^2\right| = ||x| - |y||.$$

Also

$$\left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right|^2 \leq |x - y| < \epsilon^2.$$

Wir schliessen, dass $\left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right| < \epsilon$ und somit f gleichmässig stetig ist.

2. x^2 *ist nicht gleichmässig stetig:*

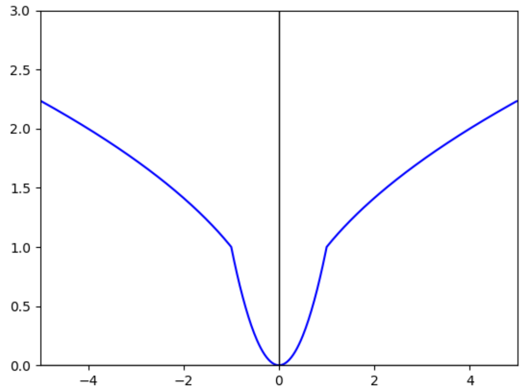


Seien $\epsilon = 1$ und $\delta > 0$ beliebig. Dann haben $x = \frac{1}{\delta}$ und $y = x + \frac{\delta}{2}$ zwar Abstand kleiner als δ, aber

$$|f(y) - f(x)| = \delta x + \tfrac{\delta^2}{4} = 1 + \tfrac{\delta^2}{4} > 1.$$

Die Funktion x^2 ist also nicht gleichmässig stetig.

3. *Die Funktion f ist gleichmässig stetig:*

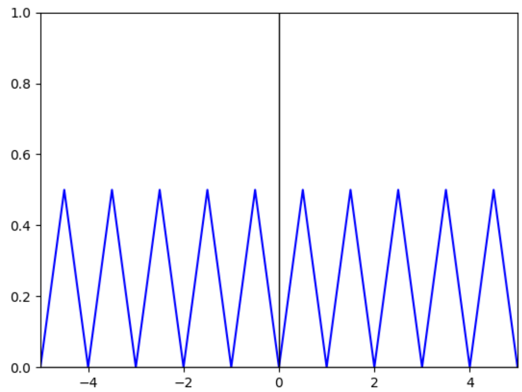


Wir haben

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|}, & |x| \geq 1 \\ x^2, & |x| \leq 1 \end{cases} .$$

Die Funktion x^2 ist gleichmässig stetig auf $[-1, 1]$, da dies ein kompaktes Intervall ist. Ausserhalb für $\sqrt{|x|}$ haben wir gleichmässige Stetigkeit schon in a) gezeigt.

4. *Die Funktion f ist gleichmässig stetig:* Die Funktion f sieht wie folgt aus:



Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Mit der Dreiecksungleichung haben wir $|y-k| \leq |y-x| + |x-k|$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Darum erhalten wir auch

$$\inf_{k\in\mathbb{Z}} |y-k| \leq |y-x| + \inf_{k\in\mathbb{Z}} |x-k|,$$

was dasselbe ist wie

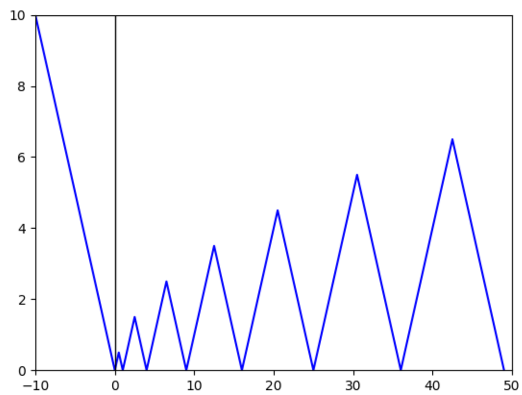
$$f(y) - f(x) \leq |y-x|.$$

Durch vertauschen von x und y erhalten wir mit demselben Argument, dass $f(x) - f(y) \leq |y-x|$ ist. Zusammen ergibt das

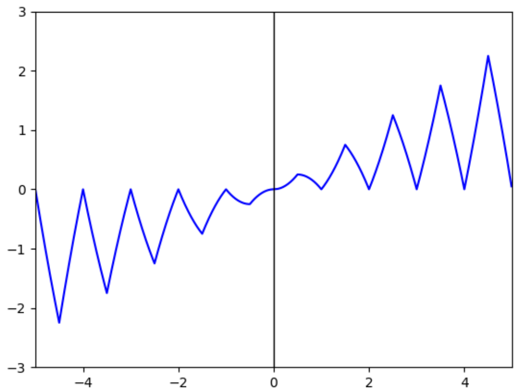
$$|f(y) - f(x)| \leq |y-x|.$$

Wählen wir nun $\delta = \epsilon$, so sehen wir dass f gleichmässig stetig ist.

5. *Die Funktion f ist gleichmässig stetig:* Analog zu Teilaufgabe d) mit k^2 anstelle von k. Die Funktion sieht folgendermassen aus:



6. *Die Funktion f ist nicht gleichmässig stetig:*



Betrachte $\epsilon = 1$ und $1 > \delta > 0$ beliebig. Dann haben $x = 2\lceil \frac{1}{\delta} \rceil$ und $y = x + \frac{\delta}{2}$ zwar Abstand kleiner als δ, aber

$$|f(y) - f(x)| = (2\lceil \tfrac{1}{\delta} \rceil + \tfrac{\delta}{2})\tfrac{\delta}{2} - 0 \geq 1 + \tfrac{\delta^2}{4} > 1.$$

Material zu Aufgabe 1a).

Fakultät Die Funktion $n \in \mathbb{N}_0 \mapsto n! \in \mathbb{N}$ ist definiert durch

$$0! = 1, \ n! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Die Zahl $n!$ wird als n-**Fakultät** oder n-**Faktorielle** bezeichnet.

Kombinatorische Bedeutung. Es gibt genau $n!$ verschiedene Möglichkeiten die Menge $\{1, \ldots, n\}$ zu sortieren oder auch $n!$ Möglichkeiten für verschiedene Reihenfolgen, wenn n nummerierte Bälle zufällig aus einer Urne gezogen werden.

Binomialkoeffizienten Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \le k \le n$ definieren wir den **Binomialkoeffizienten** $\binom{n}{k}$, als "n über k" ausgesprochen, durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Ersetzen wir k bei gleichbleibendem n im Binomialkoeffizienten durch $n-k$, so vertauschen sich bloss die beiden Ausdrücke im Nenner und wir erhalten

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \le k \le n$.

Additionsformel. Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \le k \le n$ gelten $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ und

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}. \tag{1}$$

Insbesondere ist $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \le k \le n$.

Proof. Wir verwenden die Definition der Binomialkoeffizienten und erhalten

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{0!\,n!} = 1$$

sowie

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-(k-1))!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{k\ n!}{k!\ (n+1-k)!} + \frac{(n+1-k)\ n!}{k!\ (n+1-k)!}$$
$$= \frac{(k+n+1-k)\ n!}{k!\ (n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

durch Erweiterung mit k beziehungsweise $n+1-k$.

Die Aussage, dass $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \le k \le n$, ergibt sich aus den ersten beiden Aussagen und Induktion nach n. □

Kombinatorische Bedeutung. Die Zahl $\binom{n}{k}$ für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \le k \le n$ ist die Anzahl Möglichkeiten k Elemente aus einer Sammlung mit n Elementen auszuwählen. Formal ausgedrückt: Es gibt genau $\binom{n}{k}$ Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$, die k Elemente besitzen.

Binomischer Lehrsatz Für $w, z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(w+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w^{n-k} z^k.$$

Beweis des binomischen Lehrsatzes. Für $n = 0$ gilt die Aussage, da

$$(w+z)^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} 1 w^{0-k} z^k.$$

Angenommen die Aussage des Satzes gilt für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
(w+z)^{n+1} = (w+z)^n (w+z) &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w^{n-k} z^k \right) (w+z) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w^{n+1-k} z^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w^{n-k} z^{k+1} \\
&= w^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} w^{n+1-k} z^k + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} w^{n-j} z^{j+1} + z^{n+1} \\
&= w^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} w^{n+1-k} z^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} w^{n+1-k} z^k + z^{n+1} \\
&= w^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} w^{n+1-k} z^k + z^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} w^{n+1-k} z^k
\end{aligned}$$

unter Verwendung einer Indexverschiebung und der Additionsformel. □