Aufgabe 1. (Alte Prüfungsaufgaben)

a) Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}$.

b) Konvergiert die folgende Reihe? Konvergiert sie absolut?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2-1}}.$$

Nennen Sie die Konvergenzsätze mit Namen, die Sie verwenden.

c) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Reihe

$$x + 4x^4 + 9x^9 + 16x^{16} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n^2}.$$

Falls Sie dabei ein Resultat über Konvergenzradien aus der Vorlesung benutzen, so schreiben Sie die vollständige Aussage dieses Resultats auf.

Lösung.

a) Wir bemerken zunächst, dass $4k^2 - 1 = (2k-1)(2k+1)$. Mit Partialbruchzerlegung oder raten erhalten wir, dass

$$\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right).$$

Wir betrachten die Partialsummen

$$\begin{aligned} s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right), \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit daraus folgt, dass wir eine Teleskopsumme erhalten. Nun betrachten wir den Limes $n \to \infty$ der Partialsummen und erhalten

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{2},$$

was zu zeigen war.

b) Sie *konvergiert nach dem Leibnitzkriterium*, da $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$ monoton fallend ist und gegen Null strebt. Sie *konvergiert aber nicht absolut*, da

$$\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Die harmonische Reihe konvergiert nicht. Nach dem Majorantenkriterium, divergiert darum auch

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}.$$

c) Hier sind die Koeffizienten der Reihe

$$a_n = \begin{cases} n & \text{falls } n \text{ ein Quadrat ist,} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

somit ist der Konvergenzradius

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = 1.$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren. Berechnen Sie den Grenzwert, falls die Reihe konvergiert.

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^4+n^2+1} \qquad\qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2^n)}{e^n}$$

Lösung.

(a) *Die Reihe konvergiert:* Wir können abschätzen:

$$\frac{n}{n^4+n^2+1} \leq \frac{n}{n^4} = \frac{1}{n^3}$$

und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konvergiert. Mit dem Majorantenkriterium konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^4+n^2+1}$.

Der Grenzwert: Wir wollen die Partialsummen berechnen. Beachte, dass der Nenner umgeschrieben werden kann als

$$n^4+n^2+1 = (n^2+1)^2 - n^2 = (n^2+1-n)(n^2+1+n).$$

Ausserdem ist

$$\frac{n}{n^4+n^2+1} = \frac{n}{(n^2+1-n)(n^2+1+n)} = \frac{1/2}{(n^2+1-n)} - \frac{1/2}{(n^2+1+n)}.$$

Wenn wir $a_n = \frac{1/2}{(n^2+1-n)}$ setzen, ist

$$\frac{n}{n^4+n^2+1} = a_n - a_{n+1}$$

Darum ist die Partialsumme

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{n}{n^4+n^2+1} = \sum_{n=0}^{N} a_n - a_{n+1} = a_0 - a_{N+1} = \frac{1}{2} - \frac{1/2}{(N^2+1+N)}.$$

Im Grenzwert $N \to \infty$ bekommen wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^4+n^2+1} = \frac{1}{2}.$$

(b) Wir schreiben zuerst um:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2^n)}{e^n} = \log(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}.$$

Die letztere Reihe konvergiert: Der Quotient der Glieder der Folge gegeben durch $a_n = \frac{n}{e^n}$ ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{e^{n+1}} \frac{e^n}{n} = \frac{n+1}{en},$$

welcher Grenzwert $\frac{1}{e} < 1$ hat. Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$.

Der Grenzwert: Wir setzen $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$. Dann haben wir

$$eS = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{e^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{e^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^n} = S + \frac{1}{1-\frac{1}{e}}.$$

Also ist $(e-1)S = \frac{e}{e-1}$. Wir schliessen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2^n)}{e^n} = \frac{\log(2)e}{(e-1)^2}.$$

Aufgabe 3. Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen die gegen 0 konvergiert. Wir definieren

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+a_n) = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}(1+a_k)$$

im gleichen Sinn wie auch Reihen. Zeigen Sie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \iff \prod_{n=0}^{\infty}(1+a_n) \text{ konvergiert, mit Grenzwert} \neq 0.$$

Hinweis: Beweisen und benutzen Sie, dass $\frac{1}{2}x \leq \log(1+x) \leq x$ für genügend kleine $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt.

Lösung. Weil $\exp(x) \geq 1+x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend ist, gilt $\log(\exp(x)) \geq \log(1+x) \iff x \geq \log(1+x)$. Ausserdem haben wir

$$e^{\frac{1}{2}x} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!2^k} \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{2^k}.$$

Wenn $x \in [0,1]$ ist, gilt $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{2^k} = \frac{2}{2-x} = 1 + \frac{x}{2-x} \leq 1+x$. Somit folgt

$$e^{\frac{1}{2}x} \leq 1+x$$

und wir erhalten

$$\frac{1}{2}x \leq \log(1+x) \leq x.$$

Falls nun die Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ gegen Null strebt, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit, so dass $0 \leq a_n < 2$ für alle $n \geq N$. Somit gilt

$$\frac{1}{2}a_n \leq \log(1+a_n) \leq a_n$$

für alle $n \geq N$. Wir summieren diese Ungleichungen und erhalten

$$\frac{1}{2}\sum_{k=N}^{n} a_k \leq \sum_{k=N}^{n}\log(1+a_k) = \log\prod_{k=N}^{n}(1+a_k) \leq \sum_{k=N}^{n} a_k.$$

Wenn $n \to \infty$ strebt, folgt die gewünschte Aussage.

Aufgabe 4. Entscheiden Sie, welche der folgenden Reihen konvergieren.

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\log(\frac{n+1}{n})$ f) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log(n)^n}$ g) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

Lösung.

a) *Divergiert:* Durch die Indexverschiebung $n = m - 1$, wollen wir die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m-1}{(m-1)^2+1}$ analysieren. Sei $a_m = \frac{m-1}{(m-1)^2+1}$. Doch dann ist $a_m = \frac{m-1}{m^2-2m+2} \geq \frac{m-1}{m^2} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m^2} =: b_m$ weil $m \geq 1$ ist. Die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ konvergiert aber nicht, da $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}$ konvergiert aber $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}$, die harmonische Reihe, divergiert. Aus $0 \leq b_m \leq a_m$ folgt aus dem Majorantenkriterium, dass $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ nicht konvergiert.

b) *Konvergiert:* Wir prüfen das Leibnizkriterium: Sei (a_n) die Folge definiert durch $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Es gilt

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
- $a_n \geq 0$
- $a_n \geq a_{n+1}$, da aus $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$ die Ungleichung $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ folgt.

Darum konvergiert die Reihe.

c) *Konvergiert:* Weil $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, konvergiert die in der Aufgabe gegebene Reihe sogar absolut.

d) *Konvergiert:* Für $n \geq 1$ haben wir $n! \geq n$. Darum ist $\frac{1}{(n!)^2} \leq \frac{1}{n^2}$. Mit dem Majorantenkriterium konvergiert die Reihe.

e) *Divergiert:* Wir nutzen, dass $\log(st) = \log(s) + \log(t)$ für $s, t > 0$ gilt . Darum haben wir für $N \in \mathbb{N}$ eine Teleskopsumme

$$\sum_{n=1}^{N} \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{N} (\log(n+1) - \log(n)) = \log(N+1) - \log 1.$$

Weil log unbeschränkt wächst, divergiert die Summe für $N \to \infty$.

f) *Konvergiert:* Wir nutzen das Wurzelkriterium. Sei $a_n = \frac{1}{\log(n)}^n$. Dann konvergiert

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{\log(n)^n}} = \frac{1}{\log(n)}$$

gegen 0 (da log unbeschränkt ist). Darum konvergiert die Reihe.

g) *Konvergiert:* Nach dem Majorantenkriterium, der Abschätzung $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{n^3}$ und der Konvergenz der Summe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

h) *Konvergiert:* Wir schätzen ab: $0 \leq \log(1+\frac{1}{n^2}) \leq \frac{1}{n^2}$ durch die Abschätzung von Aufgabe 3. Da die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, konvergiert auch die ursprüngliche Reihe.

Aufgabe 5. (Schwer)

a) Berechnen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1})^n}{n^2} x^n.$$

b) Zeigen Sie Konvergenz der Potenzreihe bei den Punkten $-R, R \in \mathbb{R}$.

Lösung.

a) Wir benutzen das Wurzelkriterium. Sei $\rho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Somit gilt

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}}{n^{2/n}}.$$

Wir können die Grenzwerte des Nenners und des Zählers separat berechnen (falls sie konvergieren). Konkret ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{2/n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^{1/n}}\right)^2 = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/n}}\right)^2,$$

wobei wir die Stetigkeit von $x \mapsto x^2$ verwendet haben. Ausserdem gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/n}} = \lim_{x\to 0} x^x = 1,$$

wenn wir $x \to 0$ betrachten. (Die Aussage[1] $\lim\limits_{x\to 0} x^x = 1$ stimmt für jede Folge $x = (x_n) \to 0$, also auch für $x_n = \frac{1}{n}$.)

Im Nenner $\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}$ wollen wir die Differenz von Wurzeln in eine Addition verwandeln. Dazu benutzen wir den Trick: $(a-b) = \frac{a^2-b^2}{a+b}$ und erhalten

$$\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} = \frac{n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}.$$

Der Term $\frac{-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}$ verschwindet für $n \to \infty$. Der andere Term kann wie folgt umgeformt werden:

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}.$$

[1] Siehe Beispiel 3.79 im Skript.

Durch Stetigkeit der vorkommenden Funktionen finden wir, dass die Terme $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{n^2}$ verschwinden, erhalten also

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

Daraus erhalten wir

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}}{n^{2/n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{2/n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Der Konvergenzradius ist somit $R = \frac{1}{\rho} = 2$.

b) Wir überprüfen der Konvergenz der Potenzreihe bei $R = 2$ und $-R = -2$.

Wie oben gilt

$$\frac{(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1})^n}{n^2} = \frac{(n-1)^n}{n^2(\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1})^n}.$$

Mit der Abschätzung $\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1} \geq 2n$ und $\frac{(n-1)}{n} \leq 1$ folgt

$$\frac{(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1})^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \left(\frac{n-1}{2n} \right)^n \leq \frac{1}{2^n n^2}.$$

Somit gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1})^n}{n^2} 2^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2} 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Also ist die Potenzreihe absolut konvergent für $R = \pm 2$ ist.

Aufgabe 6. (Leicht) Sei $w = re^{i\theta}$ ungleich Null. Zeigen Sie, dass die n-ten Wurzeln von w (nämlich die Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^n = w$) durch die n-Zahlen gegeben sind

$$\left\{ \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(2\pi\alpha + \frac{\theta}{n}\right)} \,|\alpha = 0, \tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}, \dots, \tfrac{n-1}{n} \right\}.$$

Bemerkung: Wenn $w = 1$ ist, sind seine n-ten Wurzeln gegeben durch

$$\{ e^{2\pi i\alpha} \,|\alpha = 0, \tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}, \dots, \tfrac{n-1}{n} \}$$

und werden die n-ten **Einheitswurzeln** genannt.

Lösung. Da $e^{i2\pi k} = 1$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, haben wir

$$w = re^{i\theta} = re^{i(\theta+2\pi k)}.$$

Die n-te Wurzel dieser Gleichung ist

$$z_k = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2\pi k}{n}}$$

was direkt das Resultat ergibt.

Aufgabe 7. (Leicht) Zeigen Sie für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ die Identität $\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i\frac{k}{n}} = 0$. Illustrieren Sie die Identität mit einer Skizze für $n = 2, 3, 5$.

Lösung. Wir erkennen eine (endliche) geometrische Reihe und berechnen direkt:

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i2\pi\frac{k}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i2\pi\frac{1}{n}}\right)^k = \frac{1-\left(e^{i2\pi\frac{1}{n}}\right)^n}{1-e^{i2\pi\frac{1}{n}}} = \frac{1-1}{1-e^{i2\pi\frac{1}{n}}} = 0.$$