Aufgabe 1. Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f_1(x) = \sqrt{1+x^2}$

b) $f_2(x) = \cos(\cos x)$

c) $f_3(x) = \exp\left(\frac{1}{1+x^4}\right)$

d) $f_4(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$

e) $f_5(x) = x^{\sin x}$ (definiert nur für $x > 0$)

Lösung.

a) $f_1'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

b) $f_2'(x) = -\sin(\cos x) \cdot (-\sin x) = \sin(\cos x)\sin x$

c) $f_3'(x) = \exp\left(\frac{1}{1+x^4}\right)\frac{-4x^3}{(1+x^4)^2}$

d) $f_4'(x) = \frac{e^x(e^x+1)-(e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

e) $f_5'(x) = (e^{\sin x \log x})' = e^{\sin x \log x}(\frac{\sin x}{x} + \cos x \log x) = x^{\sin x}(\frac{\sin x}{x} + \cos x \log x)$.

Aufgabe 2. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge ohne isolierte Punkte, und seien $f, g \in C^n(D)$. Erklären Sie, warum $fg \in C^n(D)$ gilt, und zeigen Sie

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} .$$

Bemerkung: Das Ziel dieser Übung ist, den Beweis von Korollar 5.13 auszuformulieren.

Lösung. Wir beweisen die Aussage per Induktion.

$n = 1$: Dies ergibt die klassische Produktregel $(fg)^{(1)} = fg' + f'g = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} f^{(k)} g^{(1-k)}$.

$n > 1$: Wir nehmen an, dass die Aussage $(fg)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(m-k)}$ für $m \leq n$ gilt und beweisen $(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$. Wir benutzen die Linearität und die gewöhnliche Produktregel (Fall $n = 1$) der Ableitung

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)} = (fg)^{(n)\prime} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= \binom{n+1}{0} f^{(0)} g^{(n+1)} + \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) f^{(k)} g^{(n+1-k)}
\end{aligned}
$$

Die gewünschte Aussage

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}.$$

folgt nun aus

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Letztere Identität folgt aus

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!(n-k+1-k)}{(k)!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}.$$

Aufgabe 3. (Leicht) Sei a eine beliebige reelle Zahl, und $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{C}$ die durch $f(x) = x^a$ gegebene Funktion. Zeigen Sie, dass f stetig differenzierbar ist, und dass $f'(x) = ax^{a-1}$ gilt.

Bemerkung: In dieser Aufgabe verallgemeinern wir Korollar 5.14.

Lösung. Per Definition ist $f(x) = x^a = \exp(a \log(x))$ für $x > 0$. Aus der Ableitung der Logarithmusabbildung folgt daher

$$f'(x) = (x^a)' = \exp(a \log(x))' = \exp(a \log(x)) a \frac{1}{x} = x^a a \frac{1}{x} = ax^{a-1},$$

welches eine stetige Funktion ist auf $\mathbb{R}_{>0}$.

Aufgabe 4. Wir betrachten die Funktion

$$
\begin{aligned}
f_n : &\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
&x \mapsto \operatorname{sgn}(x) x^{n+1}.
\end{aligned}
$$

für jede nichtnegative ganze Zahl $n \in \mathbb{N}_0$.

a) Zeigen Sie, dass f_n stetig ist.

b) Zeigen Sie, dass die Ableitungen $f_n', f_n^{(2)}, ..., f_n^{(n)}$ existieren.

c) Berechnen Sie $f_n^{(n)}$ und schließen Sie, dass die Inklusionen $C^{n+1}(\mathbb{R}) \subset C^n(\mathbb{R})$ strikte Inklusionen sind.

Lösung.

a) Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass x^{n+1} auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist. Abseits von $x = 0$ ist auch $\operatorname{sgn}(x)$ stetig, da konstant. Daraus folgt, dass abseits von $x = 0$ die Funktionen f_n für alle $n \in \mathbb{N}_0$ stetig sind, da sie eine Kombination von stetigen Funktionen sind.

Bei $x = 0$ hingegen, macht $\operatorname{sgn}(x)$ einen Sprung da

$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1 \neq 0 = \operatorname{sgn}(0) \neq 1 = \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x).$$

Für $n \geq 0$, haben wir jedoch

$$\lim_{x\to 0} f_n(x) = \lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x) x^{n+1} = 0 = f_n(0)$$

und somit ist $f_n(x)$ stetig für $n \geq 0$.

b) Wir trennen wieder die Fälle $x \neq 0$ und $x = 0$.

- Für $x \neq 0$ ist $f_n(x)$ das Produkt zweier differenzierbarer Funktionen und wir können die Produktregel anwenden:

$$f_n'(x) = (\operatorname{sgn}(x))' x^{n+1} + \operatorname{sgn}(x)(x^{n+1})' = (n+1)\operatorname{sgn}(x) x^n.$$

- Bei $x = 0$ berechnen wir die Ableitung mit der Definition:

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \lim_{t\to 0} \frac{f_n(0+t) - f_n(0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sgn}(t) t^{n+1}}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \operatorname{sgn}(t) t^n \\ &= \lim_{t\to 0} f_{n-1}(t). \end{aligned}$$

Dieser Grenzwert existiert und ist gleich $f_{n-1}(0)$ für $n \geq 1$, aber er existiert nicht für $n = 0$ (siehe das Argument in Teil a)).

Wir folgern, dass $f_n(x)$ für $n \geq 1$ differenzierbar ist, und außerdem sehen wir durch Vergleich der Formeln, dass

$$f_n'(x) = (n+1)\, f_{n-1}(x).$$

Die Wiederholung dieser Berechnung zeigt, dass für $0 \leq k \leq n$

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{(n+1)!}{(n-k+1)!} f_{n-k}(x).$$

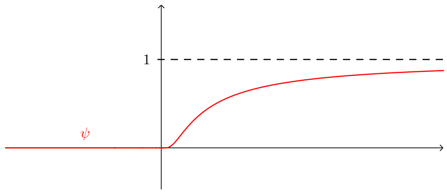

Figure 1: Graph der Funktion von Aufgabe 6.

c) Fixieren Sie nun n und betrachten Sie f_n. Wir haben in Teil b) festgestellt, dass f_n n-mal differenzierbar ist und dass

$$f_n^{(n)}(x) = (n+1)! f_0(x).$$

Da $f_0(x)$ gemäß Teil a) stetig ist, haben wir $f_n(x) \in C^n(\mathbb{R})$. Da wir schließlich gesehen haben, dass $f_0(x)$ nicht stetig, also insbesondere nicht differenzierbar ist, schließen wir, dass $f_n(x) \notin C^{n+1}(\mathbb{R})$.

Aufgabe 5. (Schwierig) Wir betrachten die Funktion $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\psi : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x \leq 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass ψ auf $\mathbb{R}$ glatt ist und dass alle seine Ableitungen bei 0 verschwinden.

Tipp 1: Zeigen Sie durch Induktion dass für $x > 0$ gilt

$$\psi^{(n)}(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right) f_n\left(\frac{1}{x}\right)$$

wobei $f_n(x)$ ein Polynom ist.

Tipp 2: Um die Ableitung bei $x = 0$ zu berechnen, verwenden Sie dass die Exponentialfunktion schneller wächst als jedes Polynom i.e.

$$\lim_{y\to\infty} \frac{y^n}{\exp(y)} = 0,$$

und setzen Sie $x = \frac{1}{y}$.

Lösung. Für $x < 0$ gibt es nichts zu zeigen, da die Ableitung der Nullfunktion die Nullfunktion ist. Für $x > 0$ sieht man mit Hilfe der Kettenregel, dass

$$\psi'(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}, \quad \psi''(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}\frac{1}{x^2} + \exp\left(-\frac{1}{x}\right)\frac{-2}{x^3}$$

und allgemeiner folgt durch Induktion, dass

$$\psi^{(n)}(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right) f_n\left(\frac{1}{x}\right) \tag{1}$$

wobei f_n ein Polynom ist. In der Tat haben wir für $n = 1$ und $n = 2$ diese Darstellung der Ableitung bereits bewiesen, wobei $f_1(t) = t^2$ und $f_2(t) = t^4 - 2t^3$. Für den Induktionsschritt setzen wir die Gültigkeit von (1) für $n \in \mathbb{N}$ voraus und erhalten

$$\begin{aligned}
\psi^{(n+1)}(x) &= \left(\exp\left(-\frac{1}{x}\right) f_n\left(\frac{1}{x}\right)\right)' \\
&= \exp\left(-\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2} f_n\left(\frac{1}{x}\right) + \exp\left(-\frac{1}{x}\right) f_n'\left(\frac{1}{x}\right) \frac{-1}{x^2} \\
&= \exp\left(-\frac{1}{x}\right) f_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right),
\end{aligned}$$

wobei das Polynom f_{n+1} definiert ist als $f_{n+1}(t) = t^2(f_n(t) - f_n'(t))$.

Es bleibt zu zeigen, dass ψ auch beliebig oft in $x = 0$ differenzierbar ist. Dabei können wir nicht auf unsere Ableitungsregeln zurückgreifen, sondern müssen dies direkt mit der Definition der Ableitung überprüfen. Wir behaupten, dass $\psi^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Um diese Behauptung zu beweisen, zeigen wir zunächst, dass für jedes Polynom f,

$$\lim_{x\to 0} \psi(x) f(\tfrac{1}{x}) = 0. \tag{2}$$

Wegen der Linearität des Grenzwertes und da $\psi(x) = 0$ für $x < 0$ ist, genügt es zu zeigen, dass $\lim_{x\to 0^+} \psi(x) x^{-n} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wenn wir $y = \frac{1}{x}$ setzen, ist dies äquivalent zu

$$\lim_{y\to\infty} \frac{y^n}{\exp(y)} = 0,$$

und dies folgt aus der Ungleichung $(1 + \frac{y}{n+1})^{n+1} \leq \exp(y)$ für alle $y \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ (siehe Korollar 3.53).

Wir zeigen nun durch Induktion, dass $\psi^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zunächst erhalten wir mit (2)

$$\psi'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\psi(x) - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \psi(x) \frac{1}{x} = 0.$$

Wenn wir nun wissen, dass $\psi^{(n)}(0) = 0$ für irgendein $n \in \mathbb{N}$ ist, dann folgt, dass

$$\psi^{(n+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\psi^{(n)}(x) - \psi^{(n)}(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\psi(x) f_n(\frac{1}{x}) - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \psi(x) f_n\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x} = 0.$$

Dies beweist, dass ψ glatt ist und $\psi^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.

Aufgabe 6. (Schwierig) Für eine fixe reelle Zahl a betrachten wir die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} |x|^a \sin(\frac{1}{x}) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Bestimmen Sie für welche Wahl von $a \in \mathbb{R}$ die Funktion f stetig, ableitbar, oder sogar stetig ableitbar ist.

Lösung. *Stetigkeit:* Für $a = 0$ ist f nicht stetig, siehe Aufgabe 3 von Übungsserie 5. Analog können wir beweisen, dass f nicht stetig ist für $a < 0$.

Für $a > 0$ ist $|f(x)| \leq |x|^a$ und $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} |x|^a = 0$. Darum ist f stetig für $a > 0$.

Differenzierbarkeit: Die Ableitung von f bei $x \neq 0$ existiert für alle $a \in \mathbb{R}$ und ist durch

$$f'(x) = a|x|^{a-1}\mathrm{sgn}(x)\sin\left(\tfrac{1}{x}\right) - |x|^{a-2}\cos\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

gegeben. Wir haben verwendet, dass die Ableitung von $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto |x|$ durch $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto \mathrm{sgn}(x)$ gegeben ist.

Für die Ableitung von f bei 0 betrachten wir den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^a \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0^+} x^{a-1} \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) = \lim_{t\to\infty} \sin(t)t^{1-a}$$

wobei wir $t = \frac{1}{x}$ gesetzt haben.

$a \leq 1$**:** Dann ist $1 - a \geq 0$ und die Funktion $\sin(t)t^{1-a}$ hat keinen Grenzwert für $t \to \infty$, weil $\sin(t)$ zwischen -1 und 1 oszilliert $t^{1-a} \geq 1$ für grosse t, somit ist f nicht differenzierbar. $a > 1$**:** Die Funktion $\sin(t)t^{1-a}$ hat den Grenzwert 0 für $t \to \infty$ da $|\sin(t)| \leq 1$ und t^{1-a} strebt gegen 0 für $t \to \infty$. Analog erhalten wir einen Grenzwert für die Ableitung von den negativen Zahlen aus gesehen.

Stetige Differenzierbarkeit:

- **$a < 2$:** Analog zur Differenzierbarkeit sehen wir, dass die Ableitung f' in jeder Umgebung von 0 unbeschränkt und insbesondere nicht stetig bei 0 ist. Somit ist f nicht stetig differenzierbar.
- **$a = 2$:** In diesem Fall ist f' beschränkt, aber nicht stetig bei 0, da der Grenzwert $\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ nicht existiert.
- **$a > 2$:** ist, ist f' stetig und f ist stetig differenzierbar. Man beachte aber, dass f' nicht differenzierbar sein muss, da für $a \leq 3$ der Grenzwert

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{ax^{a-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^{a-2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \\ &= \lim_{t\to\infty} \left(at^{2-a}\sin(t) - t^{3-a}\cos(t)\right)\end{aligned}$$

nicht existiert.

Bemerkung: Man kann die Besprechung analog fortsetzen für höhere Ableitungen.