Aufgabe 1. (Warm up mit MC Fragen aus alten Prüfungen) Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \max(x, 1-x)$ ist
   A) nicht stetig.
   B) stetig aber nicht differenzierbar.
   C) differenzierbar aber nicht stetig differenzierbar.
   D) stetig differenzierbar aber nicht zweimal differenzierbar.
2. Sei $a < b$. Was gilt für alle Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$?
   A) Falls f stetig ist, dann ist f differenzierbar.
   B) Falls f monoton wachsend ist, dann ist f beschränkt.
   C) Falls es für jedes $x \in [f(a), f(b)]$ ein $c \in [a, b]$ gibt, so dass $f(c) = x$, so ist f stetig.
   D) Falls f ein Maximum und ein Minimum annimmt, dann ist f stetig.

Lösung.

1. B
2. B

Aufgabe 2. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe von l'Hôpital's Regel.

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2 \sin(x)}$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{\cos x - 1}$ (c) $\lim_{x\to 2} \frac{x^4 - 4^x}{\sin \pi x}$

(d) $\lim_{x\to -\infty} x^3 e^x$ (e) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

Lösung.

(a) Situation $\frac{0}{0}$. Wir berechnen mit l'Hôpital's Regel

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2 \sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{2x \sin(x) + x^2 \cos(x)}.$$

Immer noch Situation $\frac{0}{0}$. Wieder mit l'Hôpital's Regel ist das derselbe Grenzwert wie

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{2x \cos(x) + 2\sin(x) + 2x\cos(x) - x^2 \sin(x)}.$$

Immer noch Situation $\frac{0}{0}$. Wieder mit l'Hôpital's Regel ist das derselbe Grenzwert wie

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)}{2\cos(x) - 2\sin(x) + 2\cos(x) + 2\cos(x) - 2x\sin(x) - 2x\sin(x) - x^2\cos(x)}.$$

Dieser Grenzwert ist gleich $\frac{-1}{2+2+2} = -\frac{1}{6}$

(b) Situation $\frac{0}{0}$. Wir berechnen mit l'Hôpital's Regel

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{\cos x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{-\sin x - 1}.$$

Immer noch Situation $\frac{0}{0}$. Wieder mit l'Hôpital's Regel ist das derselbe Grenzwert wie

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{-\cos x}.$$

Dieser Grenzwert ist gleich -1

(c) Situation $\frac{0}{0}$. Beachte, dass $4^x = \exp(x\log(4))$ ist und darum

$$(4^x)' = (\exp(x\log(4)))' = \log(4)\exp(x\log(4)) = \log(4)4^x.$$

Wir berechnen mit l'Hôpital's Regel

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^4 - 4^x}{\sin \pi x} = \lim_{x\to 2} \frac{4x^3 - \log(4)4^x}{\pi\cos\pi x} = \frac{16(2-\log(4))}{\pi}$$

(d) Wir wollen eine $\frac{\infty}{\infty}$ Situation kreieren und schreiben darum

$$\lim_{x\to -\infty} x^3 e^x = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{e^{-x}}.$$

Mit l'Hôpital's Regel ist das derselbe Grenzwert wie

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^2}{-e^{-x}}.$$

Wieder mit l'Hôpital's Regel ist das derselbe Grenzwert wie

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{6x}{e^{-x}}.$$

Wieder mit l'Hôpital's Regel ist das derselbe Grenzwert wie

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{6}{-e^{-x}}.$$

Also ist der Grenzwert gleich 0.

(e) Wir schreiben zuerst um

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{1}{x^2}\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right),$$

weil exp stetig ist. Wir haben die Situation $\frac{0}{0}$. Wir berechnen mit l'Hôpital's Regel

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\log\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2\sin(x)x^2}.$$

Dieser Grenzwert ist wie in Teilaufgabe (a) zu lösen und ergibt $-\frac{1}{6}$, also ist der ursprüngliche Grenzwert

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \exp\left(-\frac{1}{6}\right).$$

Aufgabe 3. Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, derart, dass $f(x)=f'(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt. Zeigen Sie, dass eine reelle Zahl c existiert, mit $f(x)=c\cdot\exp(x)$.

Lösung. Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, derart, dass $f=f'$. Definiere eine Funktion $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ durch $g(x)=\frac{f(x)}{\exp(x)}$. Wir berechnen die Ableitung mit der Quotientenregel

$$g'(x) = \frac{f'(x)\exp(x)-f(x)\exp'(x)}{\exp(2x)}.$$

Doch weil $f'=f$ und $\exp'=\exp$ gilt, ist die Ableitung $g'=0$. Darum ist g konstant, $g(x)=c$ für alle $x\in\mathbb{R}$. Weil aber $f(x)=g(x)\exp(x)$ ist, folgt $f(x)=c\exp(x)$.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass es keine differenzierbare Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gibt, so dass $f'(x)=\operatorname{sgn}(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt.

Lösung. Falls $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f'(x)=\operatorname{sgn}(x)$ wäre, dann ist $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definiert durch $g(x)=f(x)-|x|$ stetig. Ausserdem ist g

differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit Ableitung 0. Dass heisst g ist konstant auf den Intervallen $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$. Wegen Stetigkeit von g muss ist g global konstant, also $g(x) = f(x) - |x| = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Doch $f(x) = c + |x|$ ist nicht differenzierbar bei 0. Also existiert kein solches f.

Aufgabe 5. (Alte Prüfungsaufgabe)

a) Sei $I = (a, b)$ ein Intervall mit $a < b$ in $\overline{\mathbb{R}}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass falls die Ableitung von f beschränkt ist, dann ist f Lipschitz-stetig, dass heisst es existiert eine Konstante $c > 0$ mit $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$ für alle $x, y \in I$.

b) Gilt die obige Aussage auch, falls der Definitionsbereich von f kein Intervall ist? Beweisen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Lösung.

a) Angenommen f' ist beschränkt, d.h. es existiert ein $c \geq 0$, so dass für alle $x \in I$: $|f'(x)| \leq c$. Seien nun $x, y \in I$ beliebig und ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $y < x$. Dann ist $f_{|[y,x]}$ stetig und $f_{|(y,x)}$ differenzierbar, da f differenzierbar ist, und wir können den Mittelwertsatz anwenden, d.h. es existiert ein $\xi \in (y, x)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

Es folgt, dass

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = |f'(\xi)| \leq c,$$

und damit auch

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|,$$

was zu zeigen war.

b) Nein, die Aussage gilt nicht im Allgemeinen, falls wir nicht annehmen, dass der Definitionsbereich ein Intervall ist.

Als Gegenbeispiel betrachten wir zum Beispiel die Funktion

$$f : \bigcup_{k \geq 0} (k, k+1) \to \mathbb{R},\ x \mapsto k^2 \text{ für } x \in (k, k+1).$$

Dann ist f differenzierbar auf $U := \bigcup_{k\geq 0}(k, k+1)$, da f stückweise konstant ist auf offenen Intervallen, und $f' \equiv 0$ ist beschränkt. Aber es gilt

$$|f(k+1/2) - f(1/2)| = k^2 > ck = c|(k+1/2) - 1/2|,$$

für alle Konstanten $c > 0$ und k gross genug.

Aufgabe 6. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Zeigen Sie, dass jedes lokale Minimum von f ein globales Minimum ist.

Erinnerung: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, und sei $f : I \to \mathbb{R}$. Dann heißt f *konvex*, wenn für alle $a, b \in I$ mit $a < b$ und alle $t \in (0,1)$, die Ungleichung

$$f\big((1-t)a + tb\big) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$$

gilt. Wir sagen, dass f *strikt konvex* ist, wenn die Ungleichung strikt ist.

Lösung. Sei x_0 ein lokales Minimum von f. Wir wollen zeigen, dass für alle $x_1 \in I$ $f(x_1) < f(x_0)$ nicht wahr sein kann. Falls so ein x_1 existieren würde, dann betrachte $x_t = (1-t)x_1 + tx_0$ für $t \in (0,1)$. Wegen der Konvexität von f haben wir

$$f(x_t) = f((1-t)x_1 + tx_0) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_0) < (1-t)f(x_0) + tf(x_0) = f(x_0).$$

Dass heisst für alle t haben wir ein x_t gefunden, welches $f(x_t) < f(x_0)$ erfüllt. Doch weil $|x_t - x_0| = (1-t)|x_1 - x_0|$ beliebig klein ist (für t nahe bei 1), führt dies zum Widerspruch, dass x_0 lokal ein Minimum ist, da $f(x_t) < f(x_0)$.

Also gilt $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in I$.

Aufgabe 7. (Leicht, Teil b ist eine alte Prüfungsaufgabe)

a) Zeigen Sie dass $f : I \to \mathbb{R}$ konvex ist, genau dann wenn für alle $x \in (a,b) \subset I$ die Ungleichung
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$
gilt, und strikt konvex, wenn die obige Ungleichung strikt ist.

b) Sei f nun eine konvexe Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so dass $f(x) \leq 2023$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie dass f konstant ist.

Lösung.

a) Wir betrachten einen beliebigen Punkt $x \in I$. Dieser Punkt liegt in (a, b) genau dann wenn es ein $t \in (0, 1)$ gibt, so dass $x = (1 - t)a + tb$. Lösen wir dies nach x auf, so erhalten wir

$$t = \frac{x-a}{b-a} \qquad \text{und} \qquad 1 - t = \frac{b-x}{b-a}.$$

Da sowohl $x - a$ wie auch $b - x$ strikt positiv sind, ist die Ungleichung aus der Aufgabenstellung äquivalent zu

$$(f(x) - f(a))(b - x) \leq (f(b) - f(x))(x - a).$$

Teilen durch $b - a > 0$ und identifizieren von t resp. $1 - t$ ergibt dann

$$(f(x) - f(a))(1 - t) \leq (f(b) - f(x))t.$$

Nachdem wir den Term $-tf(x)$ weggekürzt haben ergibt eine kleine Umgruppierung dass

$$f((1 - t)a + tb) = f(x) \leq (1 - t)f(a) + tf(b).$$

Die Äquivalenz der beiden Ungleichungen folgt durch Umkehrung der einzelnen Rechenschritte. Genau gleich kann auch für die strikte Ungleichheit argumentiert werden.

b) Sei f konvex und nicht konstant. Dann gibt es zwei Punkte $a < x \in \mathbb{R}$ so dass $f(a) \neq f(x)$ also $f(a) < f(x)$ oder $f(a) > f(x)$. Wir betrachten den ersten Fall und bemerken dass

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

Wir nehmen dann noch $b > x$ beliebig, also so dass $x \in (a, b)$ und sehen aus Teil a) dass

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

umgeformt werden kann zu

$$f(b) \geq f(x) + (b - x)\frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Es folgt dass wenn b gegen ∞ strebt, auch $f(b)$ gegen unendlich strebt. Dies widerspricht jedoch der Annahme dass $f(b) \leq 2023$. Analog erhalten wir auch einen Widerspruch im zweiten Fall.

Aufgabe 8. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ und $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0,1]$ mit $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$. Zeigen Sie, dass

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \cdots + t_nf(x_n)$$

gilt. Diese Ungleichung heisst *Jensen'sche Ungleichung.*

Folgern Sie daraus, dass für beliebige positive reelle Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Ungleichungen

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

gelten.

Lösung. Wir geben einen Beweis der *Jensen'schen Ungleichung* per Induktion.

$n = 1, 2$: Für $n = 1$ ist die Aussage trivial: $f(1x) = 1f(x)$. Für $n = 2$ ist es die Definition von Konvexität:

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

$n > 2$: Angenommen die Aussage ist für n erfüllt, wir zeigen sie für $n+1$. Seien $x_1, \ldots x_{n+1} \in I$ und $t_1, \ldots, t_{n+1} \in [0,1]$, so dass $t_1 + t_2 + \cdots + t_{n+1} = 1$. Falls $t_{n+1} = 0$ folgt die Ungleichung direkt aus der Annahme für n. Wir nehmen also an, dass $t_{n+1} > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{k=1}^{n+1} t_kx_k\right) &= f\left(\sum_{k=1}^{n-1} t_kx_k + (t_n + t_{n+1})\left(\frac{t_n}{t_n + t_{n+1}}x_n + \frac{t_{n+1}}{t_n + t_{n+1}}x_{n+1}\right)\right)\\
&\leq \sum_{k=1}^{n-1} t_kf(x_k) + (t_n + t_{n+1})f\left(\frac{t_n}{t_n + t_{n+1}}x_n + \frac{t_{n+1}}{t_n + t_{n+1}}x_{n+1}\right)\\
&\leq \sum_{k=1}^{n-1} t_kf(x_k) + (t_n + t_{n+1})\left(\frac{t_n}{t_n + t_{n+1}}f(x_n) + \frac{t_{n+1}}{t_n + t_{n+1}}f(x_{n+1})\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n+1} t_kf(x_k)
\end{aligned}$$

wobei wir einmal die Induktionsannahme auf $x_1, \ldots, x_{n-1}, \frac{t_n}{t_n+t_{n+1}}x_n, \frac{t_{n+1}}{t_n+t_{n+1}}x_{n+1}$ angewendet haben und einmal Konvexität ($n = 2$) von f.

Geometrisches, arithmetisches Mittel Ungleichung: Wir beweisen zuerst die zweite Ungleichung. Falls ein $x_i = 0$ ist die Ungleichung trivial. Wir benutzen, dass exp eine konvexe Funktion ist (da $\exp'' = \exp > 0$) und erhalten für beliebige $x_i > 0$ und der Wahl $t_i = \frac{1}{n}$:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} &= \exp\left(\frac{1}{n}\log(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)\right) = \exp\left(\frac{1}{n}\log(x_1) + \ldots + \frac{1}{n}\log(x_n)\right) \\ &\leq \frac{1}{n}\exp(\log(x_1)) + \ldots + \frac{1}{n}\exp(\log(x_n)) = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}.\end{aligned}$$

Die erste Ungleichung folgt aus der zweiten mit $\frac{1}{x_i}$ anstatt x_i und mit der Rechnung

$$\frac{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdots \frac{1}{x_n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}}.$$