

Musterlösung Serie 13

VERSCHIEDENE AUFGABEN UND EIN RÄTSEL

68. 3. Isomorphiesatz für Ringe: Es sei R ein Ring und $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ zwei Ideale in R .

(a) Dann ist $\mathfrak{a}/\mathfrak{b} := \{a + \mathfrak{b} : a \in \mathfrak{a}\}$ ein Ideal in R/\mathfrak{b} .

(b) Es gilt:

$$(R/\mathfrak{b})/(\mathfrak{a}/\mathfrak{b}) \cong R/\mathfrak{a}$$

Lösung: (a) Da $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ Ideale sind, ist $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ nicht leer. Seien $\bar{a}, \bar{b} \in \mathfrak{a}/\mathfrak{b}$, $r \in R$ beliebig. Dann existieren $a, b \in \mathfrak{a}$ mit $\bar{a} = a + \mathfrak{b}$ und $\bar{b} = b + \mathfrak{b}$. Da \mathfrak{a} ein Ideal ist, ist $a + b \in \mathfrak{a}$ und somit $\bar{a} + \bar{b} = a + b + \mathfrak{b} \in \mathfrak{a}/\mathfrak{b}$. Weiterhin ist $r \cdot \bar{a} = r \cdot (a + \mathfrak{b}) = ra + \mathfrak{b} \in \mathfrak{a}/\mathfrak{b}$, weil $ra \in \mathfrak{a}$. Somit ist $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ ein Ideal in R/\mathfrak{b} .

(b) Betrachte die Abbildung

$$\varphi : \begin{cases} R/\mathfrak{b} & \longrightarrow R/\mathfrak{a} \\ r + \mathfrak{b} & \longmapsto r + \mathfrak{a} \end{cases}$$

Diese ist wohldefiniert: seien $r, r' \in R$ mit $r + \mathfrak{b} = r' + \mathfrak{b}$. Dann ist $r' - r \in \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$. Dann ist

$$\varphi(r + \mathfrak{b}) = r + \mathfrak{a} = r + (r' - r) + \mathfrak{a} = r' + \mathfrak{a} = \varphi(r' + \mathfrak{b}).$$

Weiterhin ist φ ein Ringhomomorphismus: Seien $\bar{r}, \bar{r}' \in R/\mathfrak{b}$ beliebig. Dann existieren $r, r' \in R$ mit $\bar{r} = r + \mathfrak{b}$ und $\bar{r}' = r' + \mathfrak{b}$. Rechne

$$\varphi(r + r' + \mathfrak{b}) = r + r' + \mathfrak{a} = \varphi(r + \mathfrak{b}) + \varphi(r' + \mathfrak{b}),$$

und

$$\varphi((r + \mathfrak{b})(r' + \mathfrak{b})) = \varphi(rr' + \mathfrak{b}) = rr' + \mathfrak{a} = (r + \mathfrak{a})(r' + \mathfrak{a}) = \varphi(r + \mathfrak{b}) \cdot \varphi(r' + \mathfrak{b}).$$

Wir möchten den Kernel von φ bestimmen um den 2. Isomorphiesatz zu verwenden. Da

$$\begin{aligned} \ker(\varphi) &= \{r + \mathfrak{b} \in R/\mathfrak{b} : \varphi(r + \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}\} \\ &= \{r + \mathfrak{b} \in R/\mathfrak{b} : r \in \mathfrak{a}\} \\ &= \mathfrak{a}/\mathfrak{b}, \end{aligned}$$

folgt mit dem 2. Isomorphiesatz

$$(R/\mathfrak{b})/(\mathfrak{a}/\mathfrak{b}) \cong R/\mathfrak{a}.$$

69. Finde die kleinste positive Zahl N für die gilt:

$$\begin{aligned} N &\equiv 12 \pmod{13} \\ N &\equiv 4 \pmod{7} \\ N &\equiv 3 \pmod{5} \end{aligned}$$

Lösung: Da die Zahlen 5, 7 und 13 teilerfremd sind, besitzt das System nach dem chinesischen Restsatz genau eine Lösung modulo $5 \cdot 7 \cdot 13 = 455$. Zuerst suchen wir eine Lösung der letzten beiden Gleichungen. Wegen $3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1$ ist

$$\begin{aligned} 4 \cdot 3 \cdot 5 &\equiv 0 \pmod{5}, & \text{und} & & -3 \cdot 2 \cdot 7 &\equiv 3 \pmod{5}, \\ 4 \cdot 3 \cdot 5 &\equiv 4 \pmod{7}, & \text{und} & & -3 \cdot 2 \cdot 7 &\equiv 0 \pmod{7}. \end{aligned}$$

Zusammen ist also $4 \cdot 3 \cdot 5 - 3 \cdot 2 \cdot 7 = 18$ eine Lösung der letzten beiden Kongruenzen. Das Kongruenzsystem reduziert sich somit auf

$$\begin{aligned} x &\equiv 12 \pmod{13} \\ x &\equiv 18 \pmod{35} \end{aligned}$$

Sodann ist $35 \equiv -4 \pmod{13}$ und damit $3 \cdot 35 \equiv -12 \equiv 1 \pmod{13}$. Daraus erhalten wir die Gleichung $3 \cdot 35 - 8 \cdot 13 = 1$. Diese impliziert nun

$$\begin{aligned} 12 \cdot 3 \cdot 35 &\equiv 12 \pmod{13}, & \text{und} & & -18 \cdot 8 \cdot 13 &\equiv 0 \pmod{13} \\ 12 \cdot 3 \cdot 35 &\equiv 0 \pmod{13}, & & & -18 \cdot 8 \cdot 13 &\equiv 18 \pmod{35} \end{aligned}$$

Zusammen ist daher $12 \cdot 3 \cdot 35 - 18 \cdot 8 \cdot 13 = -612$ eine Lösung des gesamten Kongruenzsystems. Da wir die kleinste positive Zahl suchen die das obige Kongruenzsystem erfüllt, ist $-612 + 2 \cdot 455 = 298$ die gesuchte Zahl N .

70. Sei R ein Integritätsring.

(a) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \iota : R &\hookrightarrow \text{Quot}(R) \\ a &\longmapsto \frac{a}{1_R} \end{aligned}$$

ist ein injektiver Ringhomomorphismus.

(b) Für jeden injektiven Ringhomomorphismus $\varphi : R \hookrightarrow K$ in einen Körper K existiert genau ein Ringhomomorphismus $\bar{\varphi} : \text{Quot}(R) \rightarrow K$ mit $\bar{\varphi} \circ \iota = \varphi$.

(c) Folgere daraus, dass $\text{Quot}(R)$ der kleinste Körper ist, welcher R enthält.

Lösung: (a) Seien $a, b \in R$ beliebig. Dann

$$\iota(a + b) = \frac{a + b}{1_R} = \frac{a}{1_R} + \frac{b}{1_R} = \iota(a) + \iota(b),$$

und

$$\iota(a \cdot b) = \frac{a \cdot b}{1_R} = \frac{a}{1_R} \cdot \frac{b}{1_R} = \iota(a) \cdot \iota(b).$$

Weil zusätzlich $\iota(1_R) = 1_Q = \frac{1_R}{1_R}$, ist ι ein Ringhomomorphismus. Um zu zeigen dass ι injektiv ist, bestimmen wir den Kernel.

$$\begin{aligned} \ker(\iota) &= \{a \in R : \iota(a) = 0_Q\} \\ &= \left\{ a \in R : \frac{a}{1_R} = \frac{0_R}{1_R} \right\} = \{0_R\}. \end{aligned}$$

(b) Wir wollen zeigen dass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\varphi} & K \\ \downarrow \iota & & \nearrow \bar{\varphi} \\ \text{Quot}(R) & & \end{array}$$

Falls $\bar{\varphi}$ existiert, so ist $\bar{\varphi}$ eindeutig:

$$\bar{\varphi} \circ \iota(1_R) = \bar{\varphi}(1_Q) = 1_K = \varphi(1_R).$$

Sei $a \in R \setminus \{0\}$. Dann ist $1_K = \bar{\varphi}(1_Q) = \bar{\varphi}\left(\frac{a}{1} \cdot \frac{1}{a}\right) = \bar{\varphi}\left(\frac{a}{1}\right) \cdot \bar{\varphi}\left(\frac{1}{a}\right) = \varphi(a) \cdot \bar{\varphi}\left(\frac{1}{a}\right)$, und somit ist $1_K = \varphi(a) \cdot \bar{\varphi}\left(\frac{1}{a}\right)$ und weil das Inverse von $\varphi(a)$ eindeutig ist, gilt $\varphi(a)^{-1} = \bar{\varphi}\left(\frac{1}{a}\right)$, also $\bar{\varphi}$ ist eindeutig.

Wir definieren $\bar{\varphi}\left(\frac{a}{b}\right) := \varphi(a) \cdot \varphi(b)^{-1}$. Dann gilt

$$\bar{\varphi} \circ \iota(a) = \bar{\varphi}\left(\frac{1}{a}\right) = \varphi(a) \cdot \varphi(1_R)^{-1} = \varphi(a),$$

also insbesondere gilt $\bar{\varphi} \circ \iota(1_R) = 1_K$.

Wir zeigen dass $\bar{\varphi}$ wohldefiniert ist:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} &\iff ad = bc \iff \varphi(ad) = \varphi(bc) \\ &\iff \varphi(a) \cdot \varphi(d) = \varphi(b) \cdot \varphi(c) \\ &\iff \varphi(a) \cdot \varphi(b)^{-1} = \varphi(c) \cdot \varphi(d)^{-1} \\ &\iff \bar{\varphi}\left(\frac{a}{b}\right) = \bar{\varphi}\left(\frac{c}{d}\right). \end{aligned}$$

Wir brauchen noch zu zeigen dass $\bar{\varphi}$ ein Ringhomomorphismus ist:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) &= \bar{\varphi}\left(\frac{ad + bc}{bd}\right) = \varphi(ad + bc) \cdot \varphi(bd)^{-1} \\ &= (\varphi(a) \cdot \varphi(d) + \varphi(b) \cdot \varphi(c)) \cdot (\varphi(b)^{-1} \cdot \varphi(d)^{-1}) \\ &= \varphi(a) \cdot \varphi(b)^{-1} + \varphi(c) \cdot \varphi(d)^{-1} \\ &= \bar{\varphi}\left(\frac{a}{b}\right) + \bar{\varphi}\left(\frac{c}{d}\right). \end{aligned}$$

(c) Sei K ein Körper mit $R \subseteq K$. Dann ist $\text{Quot}(R) \subseteq K$, also ist $\text{Quot}(R)$ der kleinste Körper der R enthält.

71. In einer Reihe stehen hintereinander abzählbar unendlich viele Logikerinnen. Jede Logikerin hat auf ihrem Rücken eine natürliche Zahl, wobei jede Zahl genau einmal vorkommt aber auf dem Rücken einer beliebigen Logikerin. Jede Logikerin sieht alle Zahlen auf den Rücken der Logikerinnen die vor ihr stehen, aber die eigene Zahl und die Zahlen auf den Rücken der Vorgängerinnen sieht sie nicht.

(a) Die hinterste Logikerin muss nun sagen (sodass es alle hören), welche Zahl auf ihrem Rücken steht, dann die zweithinterste etc., dabei darf keine Logikerin eine Zahl sagen, welche sie irgendwo auf einem Rücken vor sich sieht.

Alle sagen die richtige Zahl. Wie machen sie das?

(b) Wie (a), aber die hinterste Logikerin ist stumm (sagt also nichts), d.h. es beginnt die zweithinterste mit dem Raten.

Alle ausser höchstens einer Logikerin sagen die richtige Zahl. Wie machen sie das?

(c) Wie (b), aber die hintersten beiden Logikerinnen sind stumm.

Alle ausser höchstens zwei Logikerinnen sagen die richtige Zahl. Wie machen sie das?

Lösung: Man braucht eine Auswahlfunktion, welche aus einer Familie von 2-elementigen Mengen aus jeder Menge ein Element auswählt und dann muss man gerade und ungerade Permutationen von \mathbb{N} betrachten.