Musterlösung Serie 4

ABZÄHLPROBLEME, HOMOMORPHISMEN, UNTERGRUPPE VON $\mathrm{SO}(3)$

---

25. Wir mischen drei identische Kartendecks mit je 36 paarweise verschiedenen Karten. Wie viele verschiedene Kombinationen von drei Karten können daraus gebildet werden?

Lösung: Wir nummerieren die Karten der jeweiligen Decks von 1 bis 36. Wir ziehen nun 3 Karten und schreiben die zugehörigen Nummern in ein Tupel $(a, b, c) \in \{1, \dots, 36\}^3$. Wir bezeichnen mit A die gesuchte Anzahl Kombinationen von 3 Karten. Weil wir an der Anzahl Kombinationen interessiert sind, wollen wir nicht die Anzahl aller Tupel bestimmen, sondern die Anzahl Tupel modulo Vertauschung der Karten, weil die Kombination (a, b, c) zum Beispiel die gleiche Kombination wie (b, c, a) definiert. Daher betrachten wir die Operation der Symmetrischen Gruppe S_3 auf $X := \{1, \dots, 36\}^3$ gegeben durch

$$\begin{aligned} S_3 \times X &\to X \\ (\sigma, (a_1, a_2, a_3)) &\mapsto (a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}) \end{aligned}$$

Die Anzahl A ist jetzt gegeben durch die Anzahl Bahnen der Operation:

$$A = |X/S_3|.$$

Wir wollen Proposition 3.6 aus der Vorlesung verwenden und berechnen zuerst die Anzahl Fixpunkte für jedes Gruppenelement $g \in S_3$.

Die Gruppe S_3 besteht aus den 6 Elementen

$$(1), (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2).$$

Diese Schreibweise nennt man *Zykelschreibweise*. Wir meinen damit folgendes: der Zykel $(i\ j\ k)$ sendet das Element i auf j, das Element j auf k und das Element k auf i. Deshalb ist dieser Zykel identisch mit $(j\ k\ i)$ oder mit $(k\ i\ j)$. Analog funktioniert dies mit einem Zykel $(i\ j)$, der vertauscht einfach i und j. Der Zykel (1) ist dabei die Identität. Die Multiplikation von Zykeln entspricht der Komposition der Elemente, also:

$$(1\ 2)(2\ 3) = (2\ 3\ 1).$$

Für $n > 3$ gibt es in S_n auch Permutationen, die keine Zykel sind, zum Beispiel das Produkt $(1\ 2)(3\ 4)$, das 1 und 2, sowie 3 und 4 vertauscht. Man kann allerdings zeigen, dass jede Permutation als Produkt von Zykeln geschrieben werden kann.

Nun aber zurück zur Aufgabe. Für $g = (1)$ ist jedes Tupel ein Fixpunkt der Operation, also ist $|{}^{(1)}X| = 36^3$. Das Element $(1\ 2)$ bildet ein Tupel (a, b, c) auf (b, a, c) ab. Die Fixpunkte sind also alle Tupel (a, a, c). Es gibt 36^2 solche Tupel, also $|{}^{(1\ 2)}X| = 36^2$. Für die Elemente $(1\ 3)$ und $(2\ 3)$ folgt mit dem gleichen Argument $|{}^{(1\ 3)}X| = |{}^{(2\ 3)}X| = 36^2$. Das Element $(1\ 2\ 3)$ bildet ein Tupel (a, b, c) auf (c, a, b) ab. Daher sind die Fixpunkte alle Tupel der Form

(a, a, a), wovon es 36 gibt. Wir folgern daraus, dass $|^{(1\ 2\ 3)}X| = |^{(1\ 3\ 2)}X| = 36$ gilt. Wir wenden nun Proposition 3.6 an und erhalten:

$$\begin{aligned} A = |X/S_3| &= \frac{1}{|S_3|}\left(|^{(1)}X| + |^{(1\ 2)}X| + |^{(1\ 3)}X| + |^{(2\ 3)}X| + |^{(1\ 2\ 3)}X| + |^{(1\ 3\ 2)}X|\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(36^3 + 36^2 + 36^2 + 36^2 + 36 + 36\right) \\ &= 8436 \end{aligned}$$

26. Wir betrachten eine geschlossene Perlenkette mit 13 Perlen. Wir wollen die Perlen mit 4 Farben einfärben. Wie viele Kombinationen von Färbungen gibt es? Wie viele Kombinationen gibt es, falls wir nur 12 Perlen färben wollen?

Lösung: Wir stellen die 4 Farben mittels Nummern $1, 2, 3, 4$ dar und schreiben eine Färbung der 13 Perlen als Tupel $(a_1, \ldots, a_{13}) \in \{1, 2, 3, 4\}^{13}$, wobei die i-te Perle die Färbung a_i erhält. Da die Kette geschlossen ist, wollen wir die Färbungen als gleich betrachten unter zyklischer Vertauschung, das heisst die Färbung $(a_1, \ldots, a_{13})$ ist gleich wie $(a_2, \ldots, a_{13}, a_1)$. Wir können die Perlenkette aber auch umdrehen und erhalten $(a_{13}, \ldots, a_1)$, was wiederum die gleiche Färbung sein soll. Wir betrachten daher die Gruppenoperation der Diedergruppe D_{13} auf der Menge der Tupel $X := \{1, 2, 3, 4\}^{13}$ gegeben wie folgt:

$$\begin{aligned} D_{13} \times X &\to X \\ (g, (a_1, \ldots, a_{13})) &\mapsto (a_{g.1}, \ldots, a_{g.13}) \end{aligned}$$

wobei wir die Diedergruppe als eine Einbettung $D_{13} \hookrightarrow S_{13}$ betrachten. Nun bestimmen wir die Fixpunkte unter der Gruppenoperation für jedes Gruppenelement $g \in D_{13}$. Wir können schreiben

$$D_{13} = \langle r, s \mid r^{13} = s^2 = 1, srs = r^{-1} \rangle.$$

Für $g = 1$ ist jedes Element ein Fixpunkt, also gilt

$$|^1X| = |X| = 4^{13}.$$

Sei nun $0 < \ell < 13$. Das Gruppenelement r^ℓ sendet $(a_1 \ldots, a_{13})$ auf $(a_{\ell+1}, \ldots, a_{13}, a_1, \ldots a_\ell)$. Falls dies ein Fixpunkt ist, so gilt $a_i = a_{i+\ell}$ für alle i, also auch $a_i = a_{i+n\cdot\ell}$ für $n \geqslant 1$. Weil 13 eine Primzahl ist, folgt daraus, dass alle a_i gleich sein müssen. Daher ist

$$|^{r^\ell}X| = 4.$$

Das Gruppenelement s sendet $(a_1, \ldots, a_{13})$ auf $(a_{13}, \ldots, a_1)$. Angenommen, dies ist ein Fixpunkt. Dann gilt $a_i = a_{13-i}$ für alle i. Wir können daher die Elemente $a_1, \ldots, a_7$ frei wählen, dann sind aber die anderen Elemente vorgegeben. Daher finden wir

$$|^sX| = 4^7.$$

Mit der gleichen Argumentation folgt, dass für alle ℓ gilt

$$|^{r^\ell s}X| = 4^7.$$

Mit Proposition 3.6 finden wir, dass die gesuchte Anzahl Färbungen der 13 Perlen gleich

$$|X/D_{13}| = \frac{1}{26}\left(4^{13} + 12 \cdot 4 + 13 \cdot 4^7\right) = 2'589'304$$

ist.

Nun betrachten wir den Fall mit 12 Perlen. Wir gehen analog zu oben vor, nur dass jetzt die Gruppe D_{12} auf der Menge $X = \{1, 2, 3, 4\}^{12}$ operiert durch

$$\begin{gathered} D_{12} \times X \to X \\ (g, (a_1, \ldots, a_{12})) \mapsto (a_{g.1}, \ldots, a_{g.12}) \end{gathered}$$

Nun bestimmen wir wiederum die Fixpunkte. Für 1 ist jedes Element ein Fixpunkt, also gilt

$$|{}^1X| = 4^{12}.$$

Das Element r^ℓ für $\ell > 0$ sendet $(a_1, \ldots, a_{12})$ auf $(a_{\ell+1}, \ldots, a_{12}, a_1, \ldots, a_\ell)$. Damit dies ein Fixpunkt ist, muss also $a_i = a_{i+\ell}$ gelten, also auch $a_i = a_{i+n\ell}$ für $n \geqslant 0$. Nun ist aber 12 keine Primzahl, also müssen wir alle Fälle separat durchgehen. Wir können die Gleichung $a_i = a_{i+\ell}$ aber auch in der anderen Richtung lesen und merken, dass jeweils ℓ und $12 - \ell$ die gleichen Fixpunkte besitzt, also müssen wir nur die hälfte durchgehen. Für $\ell = 1$ oder $\ell = 11$ folgt, dass alle a_i gleich sind, also

$$|{}^rX| = |{}^{r^{11}}X| = 4.$$

Für $\ell = 2$ oder $\ell = 10$ folgt, dass alle a_i mit geraden Indices gleich sein müssen und alle mit ungeraden gleich sein müssen. Daher ist

$$|{}^{r^2}X| = |{}^{r^{10}}X| = 4^2.$$

Für $\ell = 3$ oder $\ell = 9$ sind $a_1 = a_4 = a_7 = a_{10}$, sowie $a_2 = a_5 = a_8 = a_{11}$ und $a_3 = a_6 = a_9 = a_{12}$, also

$$|{}^{r^3}X| = |{}^{r^9}X| = 4^3.$$

Für $\ell = 4$ oder $\ell = 8$ gilt $a_1 = a_5 = a_9$, sowie $a_2 = a_6 = a_{10}$ und $a_3 = a_7 = a_{11}$ und $a_4 = a_8 = a_{12}$, also

$$|{}^{r^4}X| = |{}^{r^8}X| = 4^4.$$

Für $\ell = 5$ oder $\ell = 7$ folgt nun wieder, dass alle a_i gleich sein müssen, also

$$|{}^{r^5}X| = |{}^{r^7}X| = 4.$$

Für $\ell = 6$ folgt $a_1 = a_7$, $a_2 = a_8$, $a_3 = a_9$, $a_4 = a_{10}$, $a_5 = a_{11}$ und $a_6 = a_{12}$, also

$$|{}^{r^6}X| = 4^6.$$

Nun müssen wir noch alle Fixpunkte der Elemente $r^\ell s$ bestimmen. Dieses sendet $(a_1, \ldots, a_{12})$ auf $(a_\ell, a_1, a_{12}, \ldots, a_{\ell+1})$. Damit dies ein Fixpunkt ist, muss also $a_i = a_{11-i+\ell}$ gelten. Diese Formel zwei mal angewandt ergibt

$$a_i = a_{11-i+\ell} = a_{11-(11-i+\ell)+\ell} = a_i.$$

Also sind jeweils zwei und zwei Elemente gleich, ausser Indices mit $i = 11 - i + \ell$, die unterliegen keiner Beschränkung. Für gerade ℓ ist diese Gleichung nie erfüllt, für ungerade ℓ ist sie immer für jeweils zwei Indices erfüllt. Wir folgern:

$$|{}^{r^\ell s}X| = 4^6, \quad \text{falls } \ell \text{ gerade ist}$$

und

$$|{}^{r^\ell s}X| = 4^7, \quad \text{falls } \ell \text{ ungerade ist.}$$

Wir folgern nun mit Proposition 3.6:

$$\begin{aligned}|X/D_{12}| &= \frac{1}{24}\left(4^{12} + 2\cdot 4 + 2\cdot 4^2 + 2\cdot 4^3 + 2\cdot 4^4 + 2\cdot 4 + 4^6 + 6\cdot 4^6 + 6\cdot 4^7\right)\\ &= 704'370.\end{aligned}$$

Wir sehen also, dass es viel weniger Kombinationen von Färbungen gibt mit 12 Perlen.

27. Seien $(G, \cdot, 1_G)$ und $(H, \cdot, 1_H)$ zwei Gruppen und $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige:

(a) Es gilt $\varphi(1_G) = 1_H$.

(b) Für jedes Element $x \in G$ gilt $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$.

(c) Das Bild $\varphi(G)$ ist eine Untergruppe von H.

(d) Für jede Untergruppe $M \leqslant H$ ist das Urbild $\varphi^{-1}(M)$ eine Untergruppe von G.

Lösung: (a) Für alle $g \in G$ gilt $\varphi(g) = \varphi(1_G \cdot g) = \varphi(1_G)\cdot\varphi(g)$, also ist $\varphi(1_G)$ das neutrale Element 1_H in H.

(b) Sei $x \in G$. Es gilt

$$\varphi(x)\cdot\varphi(x^{-1}) = \varphi(x \cdot x^{-1}) = \varphi(1_G) = 1_H$$

mit Teil (a). Also ist $\varphi(x^{-1})$ das inverse Element von $\varphi(x)$.

(c) Weil G als Gruppe nichtleer ist, ist auch $\varphi(G)$ nichtleer. Seien nun $a, b \in \varphi(G)$. Dann existieren $x, y \in G$ mit $\varphi(x) = a$ und $\varphi(y) = b$. Mit Teil (b) folgt

$$a \cdot b^{-1} = \varphi(x)\cdot\varphi(y)^{-1} = \varphi(x)\cdot\varphi(y^{-1}) = \varphi(xy^{-1}) \in \varphi(G).$$

Daher ist $\varphi(G)$ eine Untergruppe von H.

(d) Sei $M \leqslant H$ eine Untergruppe. Seien $a, b \in \varphi^{-1}(M)$, das heisst $\varphi(a) \in M$ und $\varphi(b) \in M$. Dann ist

$$\varphi(a \cdot b^{-1}) = \varphi(a)\cdot\varphi(b^{-1}) = \varphi(a)\cdot\varphi(b)^{-1}$$

in M, weil M eine Untergruppe von H ist. Daher folgt, dass $a \cdot b^{-1} \in \varphi^{-1}(M)$ liegt, also ist $\varphi^{-1}(M)$ eine Untergruppe von G.

28. Zeige, dass die folgenden Abbildungen Gruppenhomomorphismen sind. Finde jeweils den Kern und das Bild.

(a) Die Betragsfunktion: $(\mathbb{C}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot), \quad z \mapsto |z|$.

(b) $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot), \quad f(x) := e^{ix}$.

(c) $g : (\mathbb{R}, +) \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}), \quad g(t) := \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}$.

Lösung: (a) Aus der Analysis wissen wir, dass für alle $w, z \in \mathbb{C}$ die Gleichung $|wz| = |w||z|$ gilt. Das bedeutet, dass die Betragsfunktion ein Gruppenhomomorphismus ist. Sei $z \in \mathbb{C}$. Wir können in Polarkoordinaten $z = re^{i\varphi}$ schreiben. Es gilt $|z| = r$. Also ist das Bild der Betragsfunktion genau $\mathbb{R}^+$. Ausserdem gilt genau dann $|z| = 1$, wenn $r = 1$ gilt. Der Kern ist also $\mathbb{U}$.

(b) Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Aus der Analysis wissen wir, dass $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$ gilt. Das bedeutet, dass f ein Gruppenhomomorphismus ist. Der Kern von f ist $\ker(f) = \{x \in \mathbb{R} : e^{ix} = 1\} = 2\pi\mathbb{Z}$. Das Bild von f ist $\mathbb{U}$.

(c) Betrachten wir die Einträge einer Matrix $g(s)g(t)$ für reelle s und t, merken wir, dass wir folgendes berechnen müssen:

$$\cosh(s)\cosh(t) + \sinh(s)\sinh(t) = \frac{(e^s + e^{-s})(e^t + e^{-t})}{4} + \frac{(e^s - e^{-s})(e^t - e^{-t})}{4} = $$
$$= \frac{e^{s+t} + e^{-s-t}}{2} = \cosh(s+t)$$

und

$$\cosh(s)\sinh(t) + \sinh(s)\cosh(t) = \frac{(e^s + e^{-s})(e^t - e^{-t})}{4} + \frac{(e^s - e^{-s})(e^t + e^{-t})}{4} = $$
$$= \frac{e^{s+t} - e^{-s-t}}{2} = \sinh(s+t)$$

so dass

$$g(s)g(t) = \begin{pmatrix} \cosh(s) & \sinh(s) \\ \sinh(s) & \cosh(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \cosh(s+t) & \sinh(s+t) \\ \sinh(s+t) & \cosh(s+t) \end{pmatrix} = g(s+t).$$

Daher ist g ein Gruppenhomomorphismus.

Nun berechnen wir den Kern von g. Es gilt

$$\ker(g) = \{s \in \mathbb{R} : \cosh(s) = 1, \sinh(s) = 0\} = \{0\}$$

weil $\sinh(s) = 0$ äquivalent ist zu $e^x = e^{-x}$, also $x = 0$ (wegen $x \in \mathbb{R}$). Daher ist die Abbildung g injektiv, und $\mathbb{R} \cong g(\mathbb{R})$. Es gilt

$$g(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} : x^2 - y^2 = 1, x > 0 \right\} \leqslant \{A \in SL_2(\mathbb{R}) | A^T = A\}.$$

29. Seien φ und ψ folgende Rotationen aus $\mathrm{SO}(3)$:

- φ sei Drehung um π um diejenige Achse, die durch Verbinden des Ursprungs mit dem Punkt $(1, 0, 1)$ entsteht. Die Darstellungsmatrix von φ ist:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ψ als Drehung sei die Drehung um $\frac{2\pi}{3}$ um die z-Achse. Die Darstellungsmatrix von ψ ist:

$$\psi = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich gilt aufgrund der gewählten Drehwinkel für die Identitätsabbildung ι:

$$\varphi^2 = \iota = \psi^3$$

(a) Zeige mittels Induktion nach n, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geqslant 1$ und für alle $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{1, -1\}$ gilt

$$\psi^{\varepsilon_1}\varphi \ldots \psi^{\varepsilon_n}\varphi = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\sqrt{3} & a_{13} \\ a_{21}\sqrt{3} & a_{22} & a_{23}\sqrt{3} \\ a_{31} & a_{32}\sqrt{3} & a_{33} \end{pmatrix}$$

wobei $a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{32}, a_{33} \in \mathbb{Z}$ gerade und $a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23} \in \mathbb{Z}$ ungerade sind.

(b) Zeige, dass für alle $n \geqslant 1$ gilt:

$$\psi^{\varepsilon_1}\varphi \ldots \psi^{\varepsilon_n}\varphi \notin \{\iota, \varphi\}$$

(c) Zeige, dass für alle $n \geqslant 1$, für alle $\varepsilon_k = \pm 1$ mit $1 \leqslant k \leqslant n$, sowie für $\varepsilon_0 \in \{0, 1\}$ und $\varepsilon_{n+1} \in \{0, \pm 1\}$ gilt:

$$\varphi^{\varepsilon_0} \cdot \left(\psi^{\varepsilon_1}\varphi \ldots \psi^{\varepsilon_n}\varphi\right) \cdot \psi^{\varepsilon_{n+1}} \neq \iota$$

Mit anderen Worten: Die einzigen Relationen zwischen φ und ψ sind $\varphi^2 = \iota = \psi^3$.

Lösung: (a) Wir nutzen Induktion nach n. Da $\psi^3 = \iota$, folgt

$$\psi^{-1} = \psi^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 2\sqrt{3} & 0 \\ -2\sqrt{3} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sei $n = 1$. Dann ist

$$\psi\varphi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also haben wir die gewünschte Form mit $a_{11} = 0$, $a_{21} = 0$, $a_{31} = 2$, $a_{32} = 0$, $a_{33} = 0$ gerade, und $a_{12} = 1$, $a_{13} = -1$, $a_{22} = 1$, $a_{23} = 1$ ungerade. Ebenso ist

$$\psi^{-1}\varphi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & -1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und auch diese Matrix hat die gewünschte Form.

Sei nun $n > 1$ und wir nehmen an, dass wir die Aussage für $n-1$ bewiesen haben. Also gilt

$$\psi^{\varepsilon_1}\varphi \dots \psi^{\varepsilon_{n-1}}\varphi = \frac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12}\sqrt{3} & \tilde{a}_{13} \\ \tilde{a}_{21}\sqrt{3} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23}\sqrt{3} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32}\sqrt{3} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix}$$

für ganze Zahlen $\tilde{a}_{ij}$, mit $i, j \in \{1, 2, 3\}$, welche die gewünschten Voraussetzungen erfüllen. Wir rechnen

$$\psi\varphi(\psi^{\varepsilon_1}\varphi \dots \psi^{\varepsilon_{n-1}}\varphi) = \frac{1}{2 \cdot 2^{n-1}} \begin{pmatrix} 3\tilde{a}_{21} - \tilde{a}_{31} & (\tilde{a}_{22} - \tilde{a}_{32})\sqrt{3} & 3\tilde{a}_{23} - \tilde{a}_{33} \\ (\tilde{a}_{21} + \tilde{a}_{31})\sqrt{3} & \tilde{a}_{22} + 3\tilde{a}_{32} & (\tilde{a}_{23} + \tilde{a}_{33})\sqrt{3} \\ 2\tilde{a}_{11} & 2\tilde{a}_{12}\sqrt{3} & 2\tilde{a}_{13} \end{pmatrix}.$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} a_{11} &:= 3\tilde{a}_{21} - \tilde{a}_{31}, & a_{12} &:= \tilde{a}_{22} - \tilde{a}_{32}, & a_{13} &:= 3\tilde{a}_{23} - \tilde{a}_{33}, \\ a_{21} &:= \tilde{a}_{21} + \tilde{a}_{31}, & a_{22} &:= \tilde{a}_{22} + 3\tilde{a}_{32}, & a_{23} &:= \tilde{a}_{23} + \tilde{a}_{33}, \\ a_{31} &:= 2\tilde{a}_{11}, & a_{32} &:= 2\tilde{a}_{12}, & a_{33} &:= 2\tilde{a}_{13}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\psi\varphi(\psi^{\varepsilon_1}\varphi \dots \psi^{\varepsilon_{n-1}}\varphi) = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\sqrt{3} & a_{13} \\ a_{21}\sqrt{3} & a_{22} & a_{23}\sqrt{3} \\ a_{31} & a_{32}\sqrt{3} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ sind $\tilde{a}_{i1}$ gerade. Somit sind $a_{11} = 3\tilde{a}_{21} - \tilde{a}_{31}$ und $a_{21} := \tilde{a}_{21} + \tilde{a}_{31}$ beide gerade. Weiterhin sind offensichtlich a_{31}, a_{32} und a_{33} gerade. Da $\tilde{a}_{22}$ ungerade und $\tilde{a}_{32}$ gerade ist, folgt dass $\tilde{a}_{22} \pm \tilde{a}_{32}$ ungerade ist. Somit sind a_{12} und a_{22} beide ungerade zahlen. Weil $\tilde{a}_{23}$ ungerade und $\tilde{a}_{33}$ gerade ist, folgt ähnlich dass a_{13} und a_{23} beide ungerade Zahlen sind. Wir folgern, dass unsere neuen Zahlen ebenfalls die Voraussetzungen erfüllen. Das ganze müssen wir nun für

$$\psi^{-1}\varphi(\psi^{\varepsilon_1}\varphi \dots \psi^{\varepsilon_{n-1}}\varphi)$$

wiederholen und finden die gleiche Form. Durch Induktion folgt die Aussage.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und angenommen $\psi^{\varepsilon_1}\varphi \dots \psi^{\varepsilon_n}\varphi \in \{\iota, \varphi\}$. Mit der Formel aus Teil (a) folgt

$$\psi^{\varepsilon_1}\varphi \dots \psi^{\varepsilon_n}\varphi = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\sqrt{3} & a_{13} \\ a_{21}\sqrt{3} & a_{22} & a_{23}\sqrt{3} \\ a_{31} & a_{32}\sqrt{3} & a_{33} \end{pmatrix} \in \{\iota, \varphi\},$$

für a_{ij}, $i, j \in \{1, 2, 3\}$ wie in Teil (a). Dann ist $a_{12} = 0$, also gerade, aber nach Annahme sollte a_{12} ungerade sein. Widerspruch.

(c) Wir nehmen per Widerspruch an, dass ein $n \geqslant 1$ existiert mit

$$\varphi^{\varepsilon_0} \cdot \left(\psi^{\varepsilon_1}\varphi \dots \psi^{\varepsilon_n}\varphi\right) \cdot \psi^{\varepsilon_{n+1}} = \iota.$$

Dann folgt

$$\left(\psi^{\varepsilon_1}\varphi \dots \psi^{\varepsilon_n}\varphi\right) \cdot \psi^{\varepsilon_{n+1}} = \varphi^{\varepsilon_0}.$$

Falls $\varepsilon_{n+1} = 0$ gilt, erhalten wir einen Widerspruch nach Teil (b). Falls $\varepsilon_{n+1} = \pm 1$ ist, folgt

$$\big(\psi^{\varepsilon_1}\varphi \dots \psi^{\varepsilon_n}\varphi\big) \cdot \psi^{\varepsilon_{n+1}}\varphi = \varphi^{\varepsilon_0 + 1},$$

also ist das wieder, mit der gleichen Argumentation wie in Teil (b), ein Widerspruch.
Wir folgern, dass unsere Annahme falsch war, also gilt

$$\varphi^{\varepsilon_0} \cdot \big(\psi^{\varepsilon_1}\varphi \dots \psi^{\varepsilon_n}\varphi\big) \cdot \psi^{\varepsilon_{n+1}} \neq \iota.$$