# Musterlösung Serie 5

CAYLEY-GRAPHEN, ISOMORPHIESÄTZE

---

**30**. Stelle den Cayley-Graph von $D_4$ dar bezüglich der zwei Erzeuger $\sigma$ und $\rho$, wobei $\sigma$ Ordnung 2 und $\rho$ Ordnung 4 besitzt und es gilt $\sigma\rho\sigma = \rho^3$.

*Lösung*:

$$\begin{tikzcd}
\sigma \arrow[ddd, "\rho"'] \arrow[dr, leftrightarrow, "\sigma"'] & & & \sigma\rho \arrow[lll, "\rho"'] \\
& 1 \arrow[r, "\rho"] & \rho \arrow[d, "\rho"] \arrow[ur, leftrightarrow, "\sigma"'] & \\
& \rho^3 \arrow[u, "\rho"] \arrow[dl, leftrightarrow, "\sigma"] & \rho^2 \arrow[l, "\rho"] \arrow[dr, leftrightarrow, "\sigma"] & \\
\sigma\rho^3 \arrow[rrr, "\rho"] & & & \sigma\rho^2 \arrow[uuu, "\rho"']
\end{tikzcd}$$

**31**. Betrachte einen Würfel mit den vier Raumdiagonalen $x_1, x_2, x_3, x_4$. Stelle den Cayley-Graph seiner Symmetriegruppe $S_4$ dar bezüglich den zwei Erzeugern $\rho$ und $\sigma$, wobei $\rho$ die $120°$-Drehung um die Achse $x_1$ ist und $\sigma$ die $180°$-Drehung ist, die $x_1$ und $x_2$ vertauscht und $x_3$ und $x_4$ je auf sich abbildet.

*Lösung*: Wegen $|S_4| = 24$ suchen wir 24 Gruppenelemente. Wir nutzen Zykelnotation wie in Aufgabe 26 erklärt und bemerken, dass $\rho = (2\ 3\ 4)$ und $\sigma = (1\ 2)$ gilt. Wir stellen die möglichen Gruppenelemente durch ihre Wirkung auf die 4 Raumdiagonalen dar, also durch Positions-Tupel $(a_1, a_2, a_3, a_4)$, wobei $x_i$ auf $x_{a_i}$ gesendet wird. Das Tupel $(2, 4, 1, 3)$ bedeutet also zum Beispiel, dass $x_1$ auf $x_2$, $x_2$ auf $x_4$, $x_3$ auf $x_1$, $x_4$ auf $x_3$ gesendet wird. Der Cayley-Graph sieht dann wie folgt aus:

$$
\begin{tikzcd}
 & (1,2,3,4) \arrow[dr, "\rho"] \arrow[ddddl, leftrightarrow, "\sigma"] & & (1,4,2,3) \arrow[ll, "\rho"] \arrow[ddddr, leftrightarrow, "\sigma"] & \\
 & & (1,3,4,2) \arrow[ur, "\rho"] \arrow[d, leftrightarrow, "\sigma"] & & \\
 & & (2,3,4,1) \arrow[dl, "\rho"] & & \\
 & (3,4,2,1) \arrow[rr, "\rho"] \arrow[d, leftrightarrow, "\sigma"] & & (4,2,3,1) \arrow[ul, "\rho"] \arrow[d, leftrightarrow, "\sigma"] & \\
(2,1,3,4) \arrow[dd, bend right, "\rho"'] & (3,4,1,2) \arrow[d, "\rho"] & & (4,1,3,2) \arrow[dd, bend right, "\rho"'] & (2,4,1,3) \arrow[d, "\rho"] \\
(4,1,2,3) \arrow[u, "\rho"] \arrow[r, leftrightarrow, "\sigma"] & (4,2,1,3) \arrow[d, "\rho"] & & (3,1,2,4) \arrow[u, "\rho"] \arrow[r, leftrightarrow, "\sigma"] & (3,2,1,4) \arrow[d, "\rho"] \\
(3,1,4,2) \arrow[u, "\rho"] \arrow[ddddr, leftrightarrow, "\sigma"] & (2,3,1,4) \arrow[uu, bend right, "\rho"'] \arrow[d, leftrightarrow, "\sigma"] & & (2,1,4,3) \arrow[u, "\rho"] \arrow[d, leftrightarrow, "\sigma"] & (4,3,1,2) \arrow[uu, bend right, "\rho"'] \arrow[ddddl, leftrightarrow, "\sigma"] \\
 & (1,3,2,4) \arrow[dr, "\rho"] & & (1,2,4,3) \arrow[ll, "\rho"] & \\
 & & (1,4,3,2) \arrow[ur, "\rho"] \arrow[d, leftrightarrow, "\sigma"] & & \\
 & & (2,4,3,1) \arrow[dl, "\rho"] & & \\
 & (3,2,4,1) \arrow[rr, "\rho"] & & (4,3,2,1) \arrow[ul, "\rho"] &
\end{tikzcd}
$$

**32**. *Zweiter Isomorphiesatz.* Sei $G$ eine Gruppe, $N \trianglelefteq G$, und $K \leqslant G$. Dann gilt:

(a) $N \trianglelefteq KN \leqslant G$

(b) $(N \cap K) \trianglelefteq K$

(c) $K/(N \cap K) \cong KN/N$

*Lösung*: (a) Laut Kapitel $2$ aus der Vorlesung, ist $KN \leqslant G$. Da $N \subset KN$, ist $N \leqslant KN$. Weil $N \trianglelefteq G$ ist $N \trianglelefteq KN$. Somit erhalten wir Teil (a).

(b) Seien $x \in K$ und $a \in (N \cap K)$. Dann ist einerseits $xax^{-1} \in K$, da $x, a \in K$, und andererseits ist $xax^{-1} \in N$, weil $N \trianglelefteq G$ und $a \in N$ ist. Also $xax^{-1} \in (N \cap K)$ und somit folgt $(N \cap K) \trianglelefteq G$.

(c) Definiere eine Abbildung $\tilde{\varphi} : K \to KN/N$, durch $\tilde{\varphi}(x) := xN$. Dann ist $\tilde{\varphi}$ ein surjektiver Homomorphismus mit

$$\ker(\tilde{\varphi}) = \{k \in K : k \in N\} = N \cap K.$$

Definiere

$$\varphi : \begin{cases} K/(N \cap K) \to KN/N \\ x(N \cap K) \mapsto xN \end{cases}$$

und betrachte folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] \arrow[d, "\pi"] & KN/N \\ K/(N \cap K) \arrow[ur, "\sim"', "\varphi"] & \end{tikzcd}$$

Da $\tilde{\varphi}$ surjektiv ist, ist $\varphi$ mit dem $1$. Isomorphiesatz ein Isomorphismus, und wir erhalten Teil (c) der Aufgabe.

**33.** *Dritter Isomorphiesatz.* Sei $G$ eine Gruppe und seien $N, M$ Normalteiler von $G$ mit $M \trianglelefteq N$. Dann ist $N/M \trianglelefteq G/M$ und es gilt $G/N \cong (G/M)/(N/M)$

*Lösung*: Sei $\pi\colon G \to G/M$ die kanonische Projektion. Dann ist $\pi(N) = N/M$ und $\pi$ ist surjektiv. Mit Aufgabe 32(a) folgt, dass $N/M \trianglelefteq G/M$ ist.

Betrachte $\varphi\colon G/M \to G/N$, $\varphi(gM) = gN$. Wir müssen zuerst zeigen, dass das eine wohldefinierte Abbildung ist. Seien $g, g' \in G$ mit $gM = g'M$. Dann folgt $g'g^{-1} \in M \leqslant N$, also gilt auch $\varphi(g'M) = g'N = gN = \varphi(gM)$, also ist $\varphi$ wohldefiniert. Weiter ist $\varphi$ ein Gruppenhomomorphismus, da für alle $g, g' \in G$ die Gleichung $\varphi(gMg'M) = \varphi(gg'M) = gg'N = gNg'N = \varphi(gM)\varphi(g'M)$ gilt. Surjektivität von $\varphi$ ist offensichtlich. Der Kern von $\varphi$ ist $\ker(\varphi) = \{gM \in G/M : gN = N\} = N/M$. Nach dem ersten Isomorphiesatz gilt nun $G/N \cong (G/M)/\operatorname{Ker}(\varphi) = (G/M)/(N/M)$.

**34.** Zeige, dass für alle natürlichen Zahlen $m, n \geqslant 1$ gilt:

$$[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\colon n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})] = \operatorname{ggT}(m, n)$$

*Lösung*: Seien $m, n \geqslant 1$ natürliche Zahlen. Dann ist $n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \leqslant \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ eine Untergruppe einer zyklischen Gruppe und somit zyklisch. Mit Aufgabe 6.(a) sehen wir, dass die maximale Ordnung eines Elements dieser Gruppe gleich $\frac{\operatorname{kgV}(m,n)}{n}$ ist. Somit gilt $n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \frac{\operatorname{kgV}(m,n)}{n}\mathbb{Z}$ und daher

$$[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} : n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})] = \frac{m}{\frac{\operatorname{kgV}(m,n)}{n}} = \operatorname{ggT}(m, n).$$

**35.** Sei $n \geqslant 1$ eine natürliche Zahl. Bestimme $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

*Lösung*: Sei $\varphi\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ein Homomorphismus. Sei $k \in \mathbb{Z}$ mit $\varphi(1) = k + n\mathbb{Z}$. Dann gilt jetzt für jedes $g \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ die Gleichung $\varphi(g) = kg$. Umgekehrt ist auch für jedes $k \in \mathbb{Z}$ die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $g \mapsto kg$ ein wohldefinierter Homomorphismus: Sei nämlich $g + n\mathbb{Z} = g' + n\mathbb{Z}$, das heisst $g - g' \in n\mathbb{Z}$. Dann ist auch $kg - kg' = k(g - g') \in n\mathbb{Z}$.

Da $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ endlich ist, ist dieser Homomorphismus genau dann bijektiv, wenn er surjektiv ist. Das ist genau dann der Fall, wenn $\langle\varphi(1)\rangle = \langle k + n\mathbb{Z}\rangle = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ gilt, also genau dann, wenn $\mathrm{ggT}(k, n) = 1$ gilt. Deshalb ist $(\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), \circ) \cong (\{k + n\mathbb{Z} : \mathrm{ggT}(k, n) = 1\}, \cdot)$.

*Bemerkung:* Später werden wir sehen, dass das genau die Einheitengruppe des Ringes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist.