Musterlösung Serie 8

PERMUTATIONSGRUPPEN, SEMI-DIREKTE PRODUKTE

---

44. Zeige, dass für die Tetraedergruppe T, für die Würfelgruppe C, und für die Dodekaedergruppe D gilt:

$$T \cong A_4 \qquad C \cong S_4 \qquad D \cong A_5$$

Lösung: Für T betrachte die 4 Flächen des Tetraeders, für C betrachte die 4 Raumdiagonalen des Würfels, und für D betrachte die 5 Würfel, die einem Dodekaeder um- bzw. einbeschrieben werden können.

Betrachte beispielsweise den Dodekaeder und eine beliebige Rotation die den Dodekaeder um die Rotationsaxe, die durch zwei gegenüberstehenden Ecken des Dodekaeders geht, dreht. Falls eine dieser Ecken (und somit auch die andere) einen der 5 Würfel gehört, so bildet die Rotation den entsprechenden Würfel in sich ab. Für jede solche Rotation gibt es genau 2 Würfel die diese fixiert. Die anderen 3 Würfel werden untereinander zyklisch permutiert, so dass diese Permuttaion durch einen 3-Zykel in S_5 dargestellt werden kann. Der Dodekaeder hat genau 20 verschiedene solche Rotationen (um $2\pi/3$ und $4\pi/3$ für 10 Rotationsaxen). Bemerke andererseits auch dass es genau 20 verschiedene 3-Zykel in S_5 gibt. Somit generieren die Rotationen des Dodekaeders alle 3-Zykel in S_5, und diese erzeugen A_5. Dies genügt um zu zeigen dass $D \cong A_5$, weil die Anzahl verschiedener Rotationen des Dodekaeders, zusammen mit der Identität, gleich 60 ist, was $|A_5| = \frac{5!}{2} = 60$ entspricht.

45. (a) Zeige: Für $n \geqslant 5$ ist A_n der einzige nicht-triviale Normalteiler von S_n.

(b) Zeige, dass für $n \geqslant 5$ die Gruppe S_n nicht auflösbar ist.

Lösung: (a) Für $n \geqslant 5$, sei $K \trianglelefteq S_n$ ein Normalteiler von S_n so dass $\{\iota\} \neq K \neq S_n$. Falls $\{\iota\} \neq K \cap A_n$, so ist $K \cap A_n \trianglelefteq A_n$. Da A_n einfach ist, ist $K \cap A_n = A_n$, und weil $[S_n : A_n] = 2$ und $A_n \neq S_n$, folgt $K = A_n$.

Angenommen $\{\iota\} = K \cap A_n$. Weil $K \neq \{\iota\}$, existiert $\pi \in K$ mit $\pi \neq \iota$. Dann ist π eine ungerade Permutation, und weil $\pi^2 \in K$ und π^2 gerade ist, folgt $\pi^2 = \iota$. Somit is π ein Produkt von Transpositionen:

$$(i_1\, i_2)(i_3\, i_4) \cdots (i_{k-1}\, i_k),$$

für ein $k > 0$.

Sei $\rho \in S_n$ mit $\rho\pi\rho^{-1} \neq \pi$. Wir können beispielsweise $\rho = (i_1\, j)$, mit $j \neq i_1, i_2$, wählen. Dann ist $\rho\pi\rho^{-1} \in K \trianglelefteq S_n$, und somit $(\rho\pi\rho^{-1})\pi \neq \iota$. Dann gilt einerseits $\rho\pi\rho^{-1} \notin A_n$ und $\pi \notin A_n$, aber andererseits $(\rho\pi\rho^{-1})\pi \in A_n$ weil $\rho\pi\rho^{-1}$ und π beide ungerade sind. Das ist ein Wiederspruch zu $K \cap A_n = \{\iota\}$.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $i = 0, \ldots, n$. Eine Folge von Untergruppen $H_i \leqslant G$ mit

$$\{\iota\} = H_0 \leqslant \cdots \leqslant H_n = G,$$

so dass für alle $0 \leqslant i \leqslant n-1$ gilt $H_i \trianglelefteq H_{i+1}$, nennen wir eine *Subnormalreihe*. Laut Aufgabenteil (a) gibt es für $n \geqslant 5$ nur zwei Subnormalreihen in S_n. Diese sind $1 \trianglelefteq S_n$ und $1 \trianglelefteq A_n \trianglelefteq S_n$. Da aber A_n nicht abelsch ist, weil zum Beispiel $(1\,2\,3)(3\,4\,5) \neq (3\,4\,5)(1\,2\,3)$, ist S_n nicht auflösbar.

46. Sei $p > 2$ eine Primzahl und sei G eine Gruppe der Ordnung $|G| = 2p$.

Zeige, dass G entweder zyklisch oder isomorph zur Diedergruppe D_p ist.

Lösung: Mit dem ersten Sylowsatz oder Cauchy's Theorem folgt, dass die Gruppe G Elemente x und y mit $\mathrm{ord}(x) = 2$ und $\mathrm{ord}(y) = p$ enthält. Die Untergruppe $N = \langle y \rangle$ erzeugt durch y ist eine Sylow p-Untergruppe von G. Mit dem zweiten Sylow Satz folgt, dass die Anzahl der Sylow p-Untergruppen $2p$ teilt und kongruent 1 modulo p ist. Es kann also nur eine solche Sylow p-Untergruppe geben, da $2, p$ und $2p$ nicht kongruent 1 modulo p sind. Sei nun g ein beliebiges Element von G, dann ist gNg^{-1} eine Sylow p-Untergruppe von G und es folgt $gNg^{-1} = N$. Somit ist N ein Normalteiler von G mit Ordnung p.

Wir betrachten nun das Element $xyx^{-1} \in G$. Es muss im Normalteiler $N = \langle y \rangle$ liegen und somit gibt es ein $k \in N$ mit $xyx^{-1} = y^k$. Weiter ist k nicht durch p teilbar, da xyx^{-1} nicht das neutrale Element ist. Dann gilt

$$y^{k^2} = (y^k)^k = (xyx^{-1})^k = xy^kx^{-1} = x(xyx^{-1})x^{-1} = x^2yx^{-2}.$$

Aber es ist $x^2 = x^{-2} = e$, da x Ordnung 2 hat. Es folgt $y^{k^2} = y$ und somit ist $y^{k^2-1} = e$. Also muss p die Zahl $k^2 - 1$ teilen, da y ein Element mit Ordnung p ist. Weiter ist $k^2 - 1 = (k-1)(k+1)$. Daher teilt p entweder $k-1$, dann ist $xyx^{-1} = y$, oder p teilt $k+1$, dann ist $xyx^{-1} = y^{-1}$.

Ist $xyx^{-1} = y$ erhalten wir $xy = yx$ und wir sehen sofort, dass G erzeugt von xy zyklisch ist der Ordnung $2p$. Ist jedoch $xyx^{-1} = y^{-1}$, dann ist G isomorph zur Diedergruppe D_{2p} der Ordnung $2p$. In diesem Fall erzeugen x und y die Gruppe G (da x und y eine Untergruppe von G erzeugen deren Ordnung $2p$ teilt, aber grösser als p ist und somit $2p$ sein muss). Mit diesem Isomorphismus entspricht x der Spiegelung an einer Symmetrieachse des regelmässigen p-Ecks und y der Rotation um das Zentrum um $\frac{2\pi}{p}$.

47. Seien zwei Gruppen N, H und zwei Homomorphismen $\varphi, \varphi' \colon H \to \mathrm{Aut}(N)$ gegeben. Es seien $N \rtimes_\varphi H$ und $N \rtimes_{\varphi'} H$ die semidirekten Produkte.

Zeige, dass diese beiden Gruppen in den folgenden Situationen isomorph sind:

(a) Sei $\alpha \in \mathrm{Aut}(N)$ ein Automorphismus so, dass $\varphi'_h = \alpha \circ \varphi_h \circ \alpha^{-1}$. Dann gilt

$$N \rtimes_\varphi H \cong N \rtimes_{\varphi'} H.$$

(b) Sei $\beta \in \mathrm{Aut}(H)$ ein Automorphismus so, dass $\varphi = \varphi' \circ \beta$. Dann gilt

$$N \rtimes_\varphi H \cong N \rtimes_{\varphi'} H.$$

Lösung: (a) Wir betrachten die folgende Abbildung

$$\begin{aligned}\gamma\colon N \rtimes_\varphi H &\to N \rtimes_{\varphi'} H\\ (n,h) &\mapsto (\alpha(n), h).\end{aligned}$$

Dann folgt für $(n_1, h_1), (n_2, h_2) \in N \rtimes_\varphi H$, da α ein Automorphismus ist,

$$\begin{aligned}\gamma(n_1,h_1) \circ_{\varphi'} \gamma(n_2,h_2) &= (\alpha(n_1), h_1) \circ_{\varphi'} (\alpha(n_2), h_2) = (\alpha(n_1) \cdot \varphi'_{h_1}(\alpha(n_2)), h_1h_2)\\ &= (\alpha(n_1) \cdot (\alpha \circ \varphi_{h_1} \circ \alpha^{-1})(\alpha(n_2)), h_1h_2)\\ &= (\alpha(n_1) \cdot \alpha(\varphi_{h_1}(n_2)), h_1h_2) = (\alpha(n_1 \cdot \varphi_{h_1}(n_2)), h_1h_2)\\ &= \gamma(n_1 \cdot \varphi_{h_1}(n_2), h_1h_2) = \gamma((n_1,h_1) \circ_\varphi (n_2,h_2))\end{aligned}$$

und somit, dass γ ein Homomorphismus ist. Analog zeigt man, dass

$$\begin{aligned}\gamma'\colon N \rtimes_{\varphi'} H &\to N \rtimes_\varphi H\\ (n,h) &\mapsto (\alpha^{-1}(n), h)\end{aligned}$$

ebenfalls ein Homomorphismus ist und da α ein Automorphismus ist, ist dieser invers zu γ. Somit folgt, dass γ ein Isomorphismus ist und es gilt $N \rtimes_\varphi H \cong N \rtimes_{\varphi'} H$.

(b) Wir betrachten die folgende Abbildung

$$\begin{aligned}\delta\colon N \rtimes_\varphi H &\to N \rtimes_{\varphi'} H\\ (n,h) &\mapsto (n, \beta(h))\end{aligned}$$

Da β ein Automorphismus ist, gilt $\varphi' = \varphi \circ \beta^{-1}$. Dann folgt für $(n_1, h_1), (n_2, h_2) \in N \rtimes_\varphi H$

$$\begin{aligned}\delta(n_1,h_1) \circ_{\varphi'} \delta(n_2,h_2) &= (n_1, \beta(h_1)) \circ_{\varphi'} (n_2, \beta(h_2)) = (n_1 \cdot \varphi'_{\beta(h_1)}(n_2), \beta(h_1) \cdot \beta(h_2))\\ &= (n_1 \cdot (\varphi \circ \beta^{-1})(\beta(h_1))(n_2), \beta(h_1h_2)) = (n_1 \cdot \varphi_{h_1}(n_2), \beta(h_1h_2))\\ &= \delta(n_1 \cdot \varphi_{h_1}(n_2), h_1h_2) = \delta((n_1,h_1) \circ_\varphi (n_2,h_2))\end{aligned}$$

und somit, dass δ ein Homomorphismus ist. Analog zeigt man, dass

$$\begin{aligned}\delta'\colon N \rtimes_{\varphi'} H &\to N \rtimes_\varphi H\\ (n,h) &\mapsto (n, \beta^{-1}(h))\end{aligned}$$

ebenfalls ein Homomorphismus ist und dass dieser invers zu δ ist. Somit folgt, dass δ ein Isomorphismus ist und es gilt $N \rtimes_\varphi H \cong N \rtimes_{\varphi'} H$.

48. Bestimme bis auf Isomorphie alle Gruppen der Ordnung 28.

Hinweis: Zeige mit dem Sylow-Theorem, dass eine Gruppe der Ordnung 28 immer einen nicht-trivialen Normalteiler hat.

Lösung: Sei G eine Gruppe der Ordnung 28. Zuerst berechnen wir $|G| = 28 = 4 \cdot 7$. Die Anzahl aller Sylow 7-Untergruppen muss kongruent 1 modulo 7 sein und 4 teilen, ist also gleich 1. Es gibt also nur eine, sie ist normal und isomorph zu C_7. Sei $H \leqslant G$ eine Untergruppe der Ordnung 4. Da $C_7 \trianglelefteq G$ ist gilt $C_7H = HC_7$ und somit ist C_7H nach Aufgabe 16(b) eine Untergruppe von G. Wegen $C_7 \leqslant C_7H$ und $H \leqslant C_7H$, wird $|C_7H|$

nach dem Satz von Lagrange von 4 und 7 geteilt. Deshalb gilt $|C_7H| = 28$ und somit ist $C_7H = G$. Weiters muss $C_7 \cap H = \{e\}$ sein, denn die Ordnung jedes Elements im Schnitt muss die beiden teilerfremden Zahlen 4 und 7 teilen, also gleich 1 sein. Somit sind alle Eigenschaften des semidirekten Produktes erfüllt. Es gibt also ein $\varphi\colon H \to \operatorname{Aut}(C_7)$ mit $G \cong H \ltimes_\varphi C_7$. In Aufgabe 35 haben wir $\operatorname{Aut}(C_7)$ bestimmt. Es ist

$$\operatorname{Aut}(C_7) := \{\psi_k \mid 1 \leqslant k \leqslant 6\},$$

wobei ψ_k der Automorphismus ist, der $a \in C_7$ auf a^k sendet. Wir machen nun eine Fallunterscheidung, nämlich $H = C_4 = \langle g \rangle$ und $H = C_2 \times C_2 = \langle g \rangle \times \langle g \rangle$.

Sei zuerst $H = C_4$. Dann ist $\varphi\colon H \to \operatorname{Aut}(C_7) \cong C_6$ eindeutig durch das Bild eines Erzeugers von H gegeben. Wegen $\operatorname{ord}(\varphi(g)) | \operatorname{ord}(g)$ gibt es nur die beiden Möglichkeiten $\varphi(g) = \psi_1$ und $\varphi(g) = \psi_6$. Im ersten Fall ist $G = C_4 \times C_7$ und im zweiten Fall ist $G = C_4 \ltimes_\varphi C_7$ ein nichttriviales semidirektes Produkt.

Sei nun $H = C_2 \times C_2$. Weil die Elemente (g, e) und (e, g) Ordnung 2 haben, kommt für $\varphi(g, e)$ und $\varphi(e, g)$ jeweils auch nur ψ_1 oder ψ_6 infrage. Es gibt demnach 4 mögliche Homomorphismen $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\colon C_2 \times C_2 \to \operatorname{Aut}(C_7)$, wobei

(a) $\varphi_0(g, e) = \psi_1,\ \varphi_0(e, g) = \psi_1$

(b) $\varphi_1(g, e) = \psi_1,\ \varphi_1(e, g) = \psi_6$

(c) $\varphi_2(g, e) = \psi_6,\ \varphi_2(e, g) = \psi_1$

(d) $\varphi_3(g, e) = \psi_6,\ \varphi_3(e, g) = \psi_6$.

Die letzten drei Möglichkeiten geben nach Aufgabe 47 jedoch bis auf Isomorphie dasselbe Gruppe G, denn die drei nichttrivialen Elemente von $C_2 \times C_2$ lassen sich mit Isomorphismen von $C_2 \times C_2$ beliebig permutieren. Somit sind die zwei Möglichkeiten $G = C_2 \times C_2 \times C_7$ und $G = (C_2 \times C_2) \ltimes_{\varphi_1} C_7$. Da letzteres die einzige nichtabelsche Gruppe ist, die kein Element der Ordnung 4 enthält, gilt $(C_2 \times C_2) \ltimes_{\varphi_1} C_7 \cong D_{14}$.