

## MC-Aufgaben 3

---

11. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- (a) Seien  $G_1, G_2$  Gruppen. Dann hat jede Untergruppe von  $G_1 \times G_2$  die Form  $H_1 \times H_2$ , für bestimmte Untergruppen  $H_1 \leq G_1$  und  $H_2 \leq G_2$ .
- (b) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \mid |D_8|$  existiert eine normale Untergruppe  $H \leq D_8$  mit  $|H| = n$ .
- (c) Sei  $G$  eine Gruppe mit  $|G| = 155$ . Für nicht-triviale Elemente  $a, b \in G$  mit  $\text{ord}(a) \neq \text{ord}(b)$  gilt  $\langle a, b \rangle = G$ .

12. Sei  $H < G$  eine Untergruppe einer Gruppe  $G$ . Definiere den Zentralisator als

$$Z_G(H) = \{x \in G : \forall h \in H (hx = xh)\}.$$

Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

- (a)  $H \subset Z_G(Z_G(H))$
- (b)  $H \subset Z_G(H)$
- (c)  $Z_G(G) = Z(G)$
- (d)  $Z(G) \subset Z_G(H)$

13. Sei  $(G, e)$  eine Gruppe und seien  $K, H \trianglelefteq G$  mit  $|H \cap K| = 1$ .

Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

- (a) Für alle  $h \in H$  und  $k \in K$  gilt  $hkh^{-1}k^{-1} = e$ .
- (b) Für alle  $h \in H$  und  $k \in K$  gilt  $hk = kh$ .
- (c) Im Allgemeinen ist  $HK$  kein Normalteiler von  $G$ .

14. Sei  $T$  die Tetraedergruppe, d.h. die Symmetriegruppe des Tetraeders. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- (a)  $T$  hat keine Untergruppe mit Index 6.
- (b)  $T$  hat einen Normalteiler  $N \trianglelefteq C$  mit  $N \cong C_2 \times C_2$ .
- (c)  $T$  hat keine Untergruppe mit Index 4.
- (d) Es existiert eine Untergruppe  $H \leq T$  mit  $\text{ord}(H) = 6$ .

15. Sei  $C$  die Würfelgruppe, d.h. die Symmetriegruppe des Würfels. Welche der folgenden Aussagen ist/sind falsch? (mehrere Antworten möglich)

- (a)  $C$  hat einen Normalteiler  $N \trianglelefteq C$  mit  $N \cong C_2 \times C_2$ .
- (b) Jede Untergruppe  $H \leq C$  mit  $H \cong C_2 \times C_2$  ist ein Normalteiler.
- (c) Es existiert eine Untergruppe  $H \leq C$  mit  $H \cong C_2 \times C_4$ .
- (d) Es existiert eine Untergruppe  $H \leq C$  mit  $H \cong D_3$ .