Serie 0

Gruppenaxiome

---

0. Sei $\circ$ eine assoziative binäre Operation auf einer nichtleeren Menge S, *d.h.* für alle x, y, z in S gilt

$$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z\,.$$

Zeige, dass für alle $a, b, c, d \in S$ gilt

$$(a \circ b) \circ (c \circ d) = \big(a \circ (b \circ c)\big) \circ d\,.$$

1. Sei $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ und sei

$$\begin{aligned} \star : \quad A \times A &\to A \\ (a, b) &\mapsto \mathrm{ggT}(a, b)\,, \end{aligned}$$

wobei $\mathrm{ggT}(a, b)$ den *grössten gemeinsamen Teiler* von a und b bezeichnet.

(a) Zeige, dass die Operation $\star$ kommutativ und assoziativ ist.

(b) Zeige, dass $(A, \star)$ ein Neutralelement hat.

(c) Zeige, dass $(A, \star)$ keine Gruppe ist.

Bemerkung: Solche Strukturen werden *kommutative Monoide* genannt.

2. Sei $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ und sei $\bullet$ die binäre Operation auf $\mathbb{Q}^*$, welche wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} \bullet : \quad \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^* &\to \mathbb{Q}^* \\ (p, q) &\mapsto 2pq\,. \end{aligned}$$

Zeige, dass $(\mathbb{Q}^*, \bullet)$ eine abelsche Gruppe ist.

3. Sei $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})^* := \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}\backslash\{(0, 0)\}$ und sei $\bullet$ die binäre Operation auf $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})^*$, welche wie folgt definiert ist:

$$(p_1, q_1) \bullet (p_2, q_2) := (p_1 p_2 - q_1 q_2, p_1 q_2 + q_1 p_2)\,.$$

Zeige, dass $\big((\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})^*, \bullet\big)$ eine abelsche Gruppe ist.

4. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit Neutralelement e.

Zeige: Gilt für jedes $a \in G$, $a \circ a = e$, so ist G abelsch.

5. (a) Zeige: Jede Gruppe mit genau vier Elementen ist abelsch.

(b) Finde zwei verschiedene (*d.h.* nicht isomorphe) Gruppen mit jeweils genau vier Elementen.