Serie 1

ZYKLISCHE GRUPPEN, UNTERGRUPPEN, ORDNUNG EINES ELEMENTS

---

6. (a) Sei G eine Gruppe und sei g ein Element endlicher Ordnung. Zeige, dass für jede ganze Zahl k gilt

$$\operatorname{ord}(g^k) = \frac{\operatorname{kgV}(k, \operatorname{ord}(g))}{k}.$$

(b) Sei G eine Gruppe und seien $g, h \in G$ zwei kommutierende Elemente endlicher teilerfremder Ordnung. Zeige: $\operatorname{ord}(gh) = \operatorname{ord}(g) \cdot \operatorname{ord}(h)$.

(c) Zeige, dass die Aussage aus (b) für nicht kommutierende Elemente im Algemeinen nicht stimmt.

7. Seien $m, n \geqslant 1$ natürliche Zahlen.

Zeige: Es gilt genau dann $C_m \times C_n \cong C_{n \cdot m}$, wenn $\operatorname{ggT}(m, n) = 1$ ist.

8. Zeige, dass C_4 und $C_2 \times C_2$ bis auf Isomorphie die einzigen Gruppen der Ordnung 4 sind.

9. Sei G eine zyklische Gruppe. Zeige:

(a) Jede Untergruppe von G ist zyklisch.

(b) Falls G eine endliche Gruppe der Ordnung $m \geqslant 1$ ist, so ist die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \{H : H \leqslant G\} & \rightarrow & \{k \in \mathbb{N} : k \mid m\} \\ H & \mapsto & |H| \end{array}$$

wohldefiniert und bijektiv.

10. (a) Sei p eine Primzahl.
Zeige: Es gibt bis auf Isomorphie genau eine Gruppe der Ordnung p, nämlich C_p.

(b) Sei G eine Gruppe mit genau einer nichttrivialen echten Untergruppe.
Zeige: Dann gilt $G \cong C_{p^2}$ für eine Primzahl p.

11. Sei G eine Gruppe mit Untergruppen $H_1, H_2 \leqslant G$.

Zeige, $(H_1 \cup H_2) \leqslant G \iff H_1 \leqslant H_2 \vee H_2 \leqslant H_1$.

12. Zeige, dass jede Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$ von der Form $n\mathbb{Z}$ ist für ein $n \in \mathbb{N}$.