Serie 12

POLYNOMRINGE, EUKLIDISCHE RINGE

---

63. Zeige: Ist R ein Integritätsring, so ist $R[X]^* = R^*$.

64. Zeige: Ist K ein Körper und $p \in K[X]$ ein Polynom vom Grad $n > 0$. Dann hat p höchstens n verschiedene Nullstellen in K.

65. Zeige: $X^3 - X$ hat 6 Nullstellen in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Ein Integritätsring R heiss **euklidisch**, wenn eine Abbildung $\delta : R\backslash\{0\} \to \mathbb{N}$ existiert mit folgender Eigenschaft:

Für alle $a, b \in R$ *mit* $b \neq 0$ *existieren* $q, r \in R$, *sodass* $a = b \cdot q + r$ *mit* $r = 0$ *oder* $\delta(r) < \delta(b)$.

66. Zeige:

(a) Jeder euklidische Ring ist Hauptidealring.

(b) $\mathbb{Z}[i]$ und $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ sind euklidisch.

67. (a) Verallgemeinere den euklidischen Algorithmus zur Berechnung des ggT zweier Zahlen aus $\mathbb{N}$ auf euklidische Ringe.

(b) Berechne einen ggT von $X^3 + X^2 + X - 3$ und $X^4 - X^3 + 3X^2 + X - 4$ in $\mathbb{Q}[X]$.

(c) Stelle den ggT aus (b) als Linearkombination (mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}[X]$) der beiden Polynome $X^3 + X^2 + X - 3$ und $X^4 - X^3 + 3X^2 + X - 4$ dar.