

Serie 13

VERSCHIEDENE AUFGABEN UND EIN RÄTSEL

68. 3. *Isomorphiesatz für Ringe*: Es sei R ein Ring und $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ zwei Ideale in R .

(a) Dann ist $\mathfrak{a}/\mathfrak{b} := \{a + \mathfrak{b} : a \in \mathfrak{a}\}$ ein Ideal in R/\mathfrak{b} .

(b) Es gilt:

$$(R/\mathfrak{b})/(\mathfrak{a}/\mathfrak{b}) \cong R/\mathfrak{a}$$

69. Finde die kleinste positive Zahl N für die gilt:

$$N \equiv 12 \pmod{13}$$

$$N \equiv 4 \pmod{7}$$

$$N \equiv 3 \pmod{5}$$

70. Sei R ein Integritätsring.

(a) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \iota : R &\hookrightarrow \text{Quot}(R) \\ a &\longmapsto \frac{a}{1_R} \end{aligned}$$

ist ein injektiver Ringhomomorphismus.

(b) Für jeden injektiven Ringhomomorphismus $\varphi : R \hookrightarrow K$ in einen Körper K existiert genau ein Ringhomomorphismus $\bar{\varphi} : \text{Quot}(R) \rightarrow K$ mit $\bar{\varphi} \circ \iota = \varphi$.

(c) Folgere daraus, dass $\text{Quot}(R)$ der kleinste Körper ist, welcher R enthält.

71. In einer Reihe stehen hintereinander abzählbar unendlich viele Logikerinnen. Jede Logikerin hat auf ihrem Rücken eine natürliche Zahl, wobei jede Zahl genau einmal vorkommt aber auf dem Rücken einer beliebigen Logikerin. Jede Logikerin sieht alle Zahlen auf den Rücken der Logikerinnen die vor ihr stehen, aber die eigene Zahl und die Zahlen auf den Rücken der Vorgängerinnen sieht sie nicht.

(a) Die hinterste Logikerin muss nun sagen (sodass es alle hören), welche Zahl auf ihrem Rücken steht, dann die zweithinterste etc., dabei darf keine Logikerin eine Zahl sagen, welche sie irgendwo auf einem Rücken vor sich sieht.

Alle sagen die richtige Zahl. Wie machen sie das?

(b) Wie (a), aber die hinterste Logikerin ist stumm (sagt also nichts), d.h. es beginnt die zweithinterste mit dem Raten.

Alle ausser höchstens einer Logikerin sagen die richtige Zahl. Wie machen sie das?

(c) Wie (b), aber die hintersten beiden Logikerinnen sind stumm.

Alle ausser höchstens zwei Logikerinnen sagen die richtige Zahl. Wie machen sie das?