

Serie 2

UNTERGRUPPEN, NEBENKLASSEN, NORMALTEILER

13. Seien $m = 12$ und $n = 21$ und sei g ein Erzeuger der zyklischen Gruppe C_{mn} . Weiter sei $x := g^{120}$.

- (a) Zeige: $\text{ord}(x) = n$.
(b) Finde mehrere Elemente $y, z \in C_{mn}$ mit

$$C_{mn} \neq \langle z \rangle, \quad C_{mn} = \langle y \rangle \quad \text{und} \quad z^m = y^m = x.$$

14. Sei G eine Gruppe und $H \leq G$. Definiere folgende Relation auf G :

$$g \sim \tilde{g} \Leftrightarrow \tilde{g}^{-1}g \in H.$$

- (a) Zeige, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist.
(b) Zeige, dass die Äquivalenzklassen genau die Linksnebenklassen von H sind.
(c) Nimm an, die Vorschrift $[g] \circ [\tilde{g}] := [g\tilde{g}]$ definiere eine wohldefinierte binäre Operation auf G/H . Zeige, dass H ein Normalteiler von G ist. (*Bemerkung:* In der Vorlesung wurde die Umkehrung dieser Aussage gezeigt.)

15. Sei G eine Gruppe, $a \in G$ und $Z_G(a)$ der Zentralisator von a in G . Zeige:

- (a) Es gilt $\langle a \rangle \leq Z_G(a)$.
(b) Für jede Untergruppe $H \leq G$ gilt $Z_H(a) = Z_G(a) \cap H$.

16. Sei G eine Gruppe und seien U, V nichtleere Teilmengen von G . Wir definieren

$$UV := \{uv \mid u \in U, v \in V\}$$
$$U^{-1} := \{u^{-1} \mid u \in U\}.$$

- (a) Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
i. U ist eine Untergruppe von G .
ii. $UU \subseteq U$ und $U^{-1} \subseteq U$.
iii. $UU^{-1} \subseteq U$.
(b) Falls U und V Untergruppen von G sind, dann ist UV genau dann eine Untergruppe von G , wenn $UV = VU$ gilt.
(c) Ist U endlich, dann ist U bereits dann eine Untergruppe, wenn $UU \subseteq U$ gilt.

17. Sei $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \subseteq \mathbb{C}$.

(a) Zeige, dass U ein Normalteiler von (\mathbb{C}^*, \cdot) ist.

(b) Beschreibe die Menge \mathbb{C}^*/U .

18. Finde alle Untergruppen von D_4 sowie alle Inklusionen zwischen diesen. Gib an, in welchen Fällen es sich um einen Normalteiler handelt.

19. Sei T die Symmetriegruppe des regulären Tetraeders.

(a) Bestimme $|T|$.

(b) Zeige, dass T nicht abelsch ist.

(c) Bestimme alle Untergruppen von T .

(d) Welche Untergruppen von T sind nichttriviale Normalteiler?