D-MATH | Algebra I | HS 2023

Prof. Dr. Lorenz Halbeisen

Serie 3

FAKTORGRUPPEN UND GRUPPENOPERATIONEN

---

20. Zeige: Gilt $N \trianglelefteq Z(G) \trianglelefteq G$ und ist G/N zyklisch, so ist G abelsch.

21. Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe.

(a) Zeige, dass die Abbildung $G \times G/H \to G/H$, $(g, g'H) \mapsto gg'H$ eine Gruppenoperation definiert.

(b) Zeige, dass diese Operation transitiv ist. Das bedeutet, dass die Operation nur eine Bahn besitzt.

(c) Bestimme ihre Stabilisatoren.

22. Die multiplikative Gruppe $\mathbb{R}^*$ der reellen Zahlen operiere auf $\mathbb{R}^2$ durch

$$g \circ (a, b) = \left(ga, \frac{b}{g}\right),$$

wobei $g \in \mathbb{R}^*$ und $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Bestimme die Bahnen und Stabilisatoren dieser Operation.

23. Sei $G \times M \to M$ eine Operation einer Gruppe G auf einer Menge M und sei f eine Auswahlfunktion auf der Menge der Bahnen M/G, *d.h.* $f\colon M/G \to M$ und für jedes $N \in M/G$ ist $f(N) \in N$.

Zeige, dass gilt

$$|M| = \sum_{N \in M/G} \big[G : \mathrm{St}_G\big(f(N)\big)\big].$$

24. Sei $G \times M \to M$, $(g, x) \mapsto g \circ x$ eine Operation einer Gruppe G auf einer Menge M und sei $\mathcal{F}(M)$ die Menge aller Funktionen $f\colon M \to \mathbb{R}$.

Zeige, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} G \times \mathcal{F}(M) & \to & \mathcal{F}(M) \\ (g\,,\,f) & \mapsto & g * f \quad \text{mit} \quad (g * f)(x) := f(g^{-1} \circ x) \end{array}$$

eine Gruppenoperation ist und bestimme ihre Fixpunkte.