D-MATH | Algebra I | HS 2023

Prof. Dr. Lorenz Halbeisen

Serie 4

ABZÄHLPROBLEME, HOMOMORPHISMEN, UNTERGRUPPE VON $\mathrm{SO}(3)$

---

25. Wir mischen drei identische Kartendecks mit je 36 paarweise verschiedenen Karten. Wie viele verschiedene Kombinationen von drei Karten können daraus gebildet werden?

26. Wir betrachten eine geschlossene Perlenkette mit 13 Perlen. Wir wollen die Perlen mit 4 Farben einfärben. Wie viele Kombinationen von Färbungen gibt es? Wie viele Kombinationen gibt es, falls wir nur 12 Perlen färben wollen?

27. Seien $(G, \cdot, 1_G)$ und $(H, \cdot, 1_H)$ zwei Gruppen und $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige:

(a) Es gilt $\varphi(1_G) = 1_H$.

(b) Für jedes Element $x \in G$ gilt $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$.

(c) Das Bild $\varphi(G)$ ist eine Untergruppe von H.

(d) Für jede Untergruppe $M \leqslant H$ ist das Urbild $\varphi^{-1}(M)$ eine Untergruppe von G.

28. Zeige, dass die folgenden Abbildungen Gruppenhomomorphismen sind. Finde jeweils den Kern und das Bild.

(a) Die Betragsfunktion: $(\mathbb{C}^*, \cdot\,) \to (\mathbb{R}^*, \cdot\,), \quad z \mapsto |z|$.

(b) $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot\,), \quad f(x) := e^{ix}$.

(c) $g : (\mathbb{R}, +) \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}), \quad g(t) := \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}$.

29. Seien φ und ψ folgende Rotationen aus $\mathrm{SO}(3)$:

- φ sei Drehung um π um diejenige Achse, die durch Verbinden des Ursprungs mit dem Punkt $(1, 0, 1)$ entsteht. Die Darstellungsmatrix von φ ist:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ψ als Drehung sei die Drehung um $\frac{2\pi}{3}$ um die z-Achse. Die Darstellungsmatrix von ψ ist:

$$\psi = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich gilt aufgrund der gewählten Drehwinkel für die Identitätsabbildung ι:

$$\varphi^2 = \iota = \psi^3$$

(a) Zeige mittels Induktion nach n, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geqslant 1$ und für alle $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{1, -1\}$ gilt

$$\psi^{\varepsilon_1}\varphi \dots \psi^{\varepsilon_n}\varphi = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\sqrt{3} & a_{13} \\ a_{21}\sqrt{3} & a_{22} & a_{23}\sqrt{3} \\ a_{31} & a_{32}\sqrt{3} & a_{33} \end{pmatrix}$$

wobei $a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{32}, a_{33} \in \mathbb{Z}$ gerade und $a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23} \in \mathbb{Z}$ ungerade sind.

(b) Zeige, dass für alle $n \geqslant 1$ gilt:

$$\psi^{\varepsilon_1}\varphi \dots \psi^{\varepsilon_n}\varphi \notin \{\iota, \varphi\}$$

(c) Zeige, dass für alle $n \geqslant 1$, für alle $\varepsilon_k = \pm 1$ mit $1 \leqslant k \leqslant n$, sowie für $\varepsilon_0 \in \{0, 1\}$ und $\varepsilon_{n+1} \in \{0, \pm 1\}$ gilt:

$$\varphi^{\varepsilon_0} \cdot \left(\psi^{\varepsilon_1}\varphi \dots \psi^{\varepsilon_n}\varphi\right) \cdot \psi^{\varepsilon_{n+1}} \neq \iota$$

Mit anderen Worten: Die einzigen Relationen zwischen φ und ψ sind $\varphi^2 = \iota = \psi^3$.