

Serie 5

CAYLEY-GRAPHEN, ISOMORPHIESÄTZE

- 30.** Stelle den Cayley-Graph von D_4 dar bezüglich der zwei Erzeuger σ und ρ , wobei σ Ordnung 2 und ρ Ordnung 4 besitzt und es gilt $\sigma\rho\sigma = \rho^3$.
- 31.** Betrachte einen Würfel mit den vier Raumdiagonalen x_1, x_2, x_3, x_4 . Stelle den Cayley-Graph seiner Symmetriegruppe S_4 dar bezüglich den zwei Erzeugern ρ und σ , wobei ρ die 120° -Drehung um die Achse x_1 ist und σ die 180° -Drehung ist, die x_1 und x_2 vertauscht und x_3 und x_4 je auf sich abbildet.
- 32.** *Zweiter Isomorphiesatz.* Sei G eine Gruppe, $N \trianglelefteq G$, und $K \leq G$. Dann gilt:
- (a) $N \trianglelefteq KN \leq G$
 - (b) $(N \cap K) \trianglelefteq K$
 - (c) $K/(N \cap K) \cong KN/N$
- 33.** *Dritter Isomorphiesatz.* Sei G eine Gruppe und seien N, M Normalteiler von G mit $M \trianglelefteq N$. Dann ist $N/M \trianglelefteq G/M$ und es gilt $G/N \cong (G/M)/(N/M)$.
- 34.** Zeige, dass für alle natürlichen Zahlen $m, n \geq 1$ gilt:
- $$[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} : n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})] = \text{ggT}(m, n)$$
- 35.** Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Bestimme $\text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.